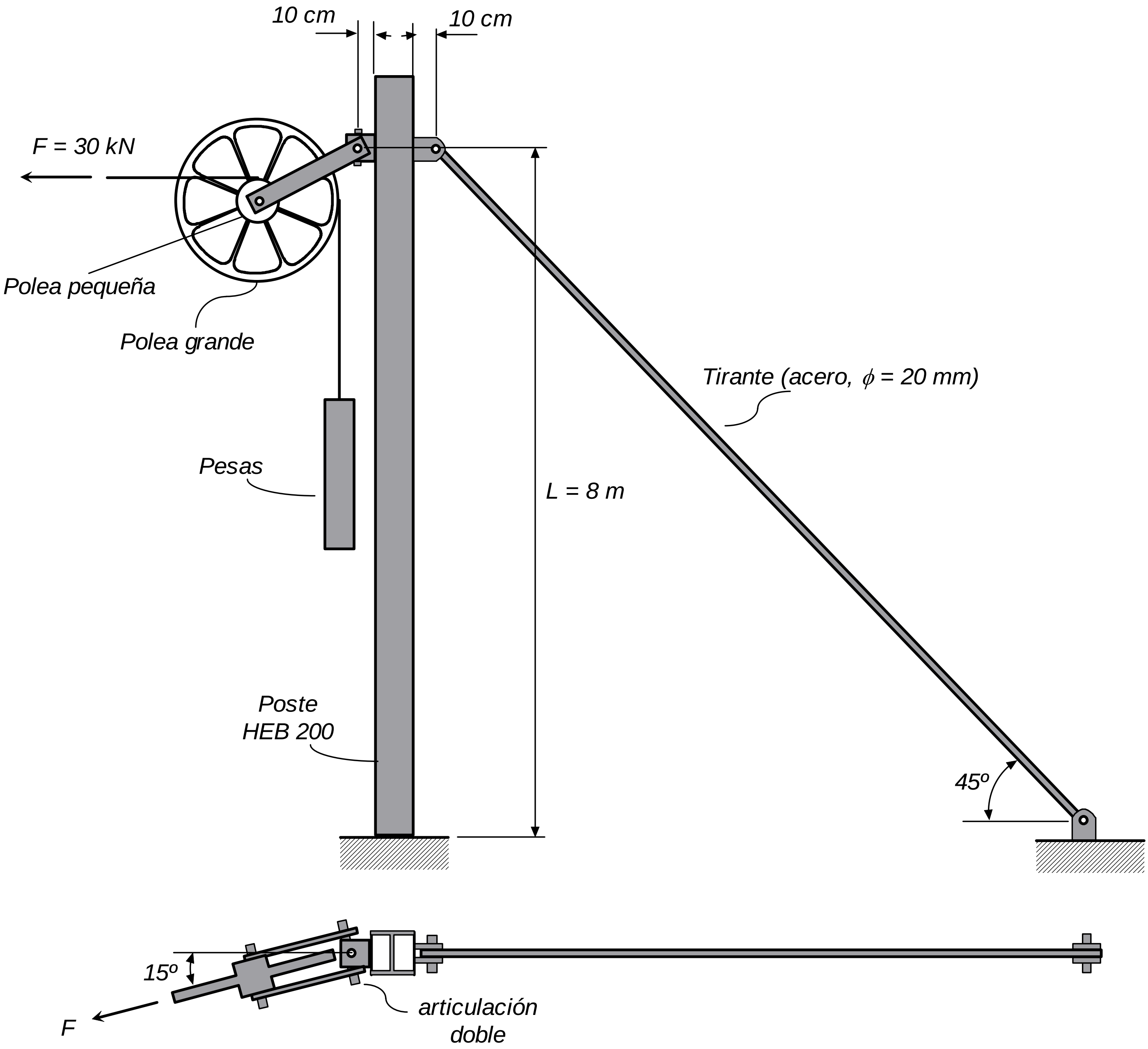
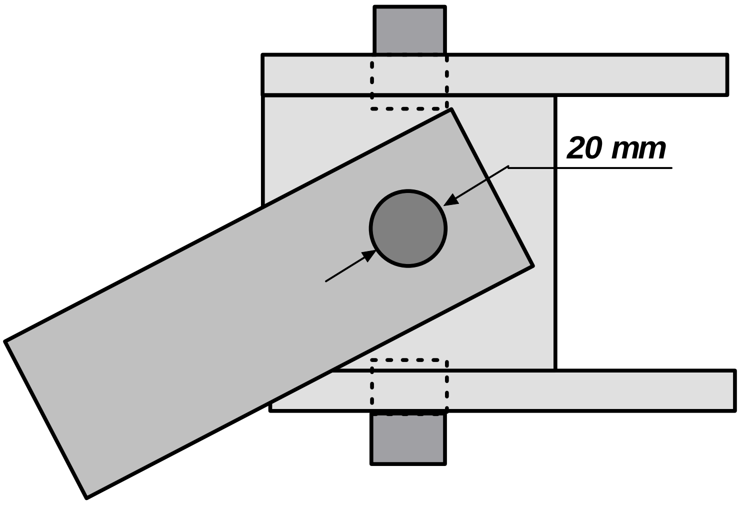
RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2010-11**
EXAMEN DE ENERO **27-1-2011**
Fecha de publicación de la preacta: 10 de Febrero
Fecha de revisión: 16 de Febrero a las 8,30 horas

EJERCICIO 3. PROBLEMA (20 puntos)

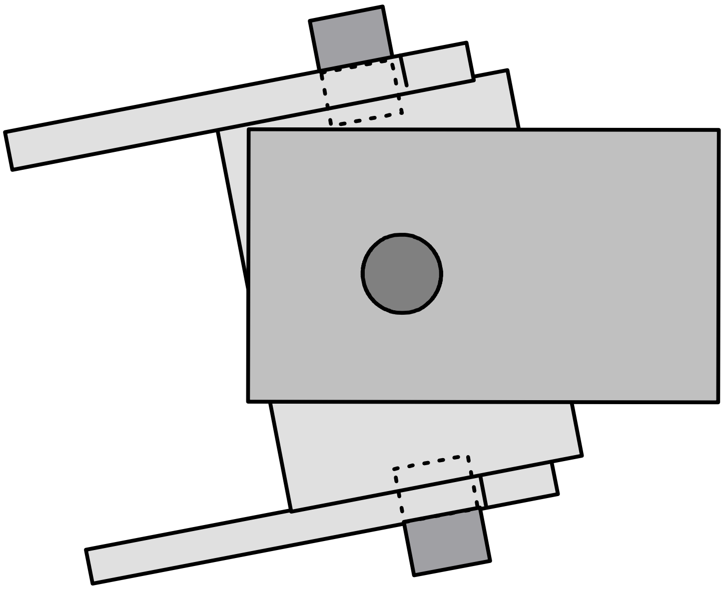
El montaje de la figura se utiliza para tensar el tendido ferroviario. El radio de la polea grande es 5 veces el de la pequeña.



La unión de las poleas al poste es una articulación doble, que permite el giro en dos ejes como se indica en el detalle de la figura siguiente.



ALZADO



PLANTA

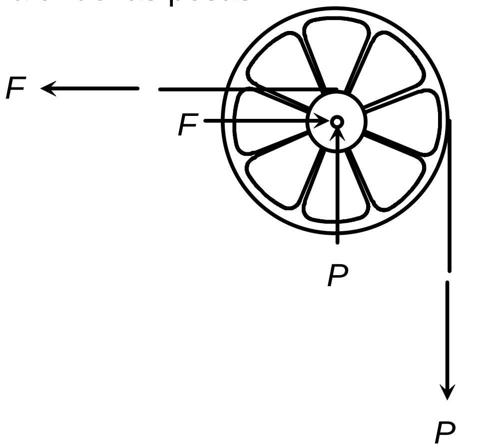
Se pide:

1.- Comprobar que la tensión en los cuatro pasadores cilíndricos iguales de la articulación doble es al menos 3 veces inferior a la admisible (τ_{adm} = 150 MPa).

2.- Comprobar si la tensión equivalente de Tresca en el poste es al menos 3 veces inferior al límite elástico (σ_e = 275 MPa). Dato: Flecha de una viga empotrada-libre de longitud L y momento de inercia I, con carga P en el extremo libre: $\delta = \dfrac{PL^3}{3EI}$

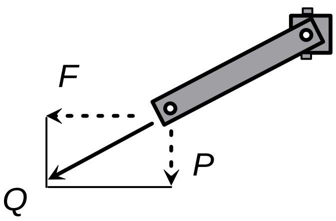
RESOLUCIÓN

1.- Aislando la polea y aplicando equilibrio rotacional respecto a su centro se obtiene el valor de las pesas.



$$F \cdot r - P \cdot 5r = 0 \quad \rightarrow \quad P = \frac{F}{5} = 6\ kN \qquad \text{(1 punto)}$$

P y F actúan sobre las barras de soporte de la polea. La composición vectorial de ambas debe estar alineada con las barras para que exista equilibrio rotacional.

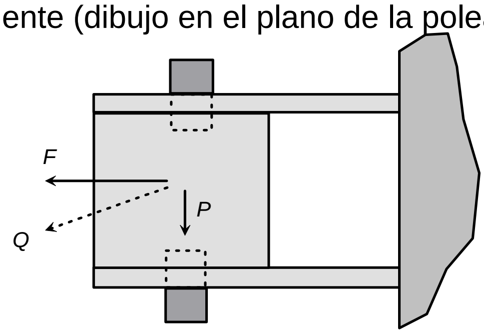


$$Q = \sqrt{30^2 + 6^2} = 30{,}6\ kN$$

Sobre cada barra de soporte de la polea (y por ello, sobre cada pasador **horizontal** de la articulación doble), actúa la mitad de Q.

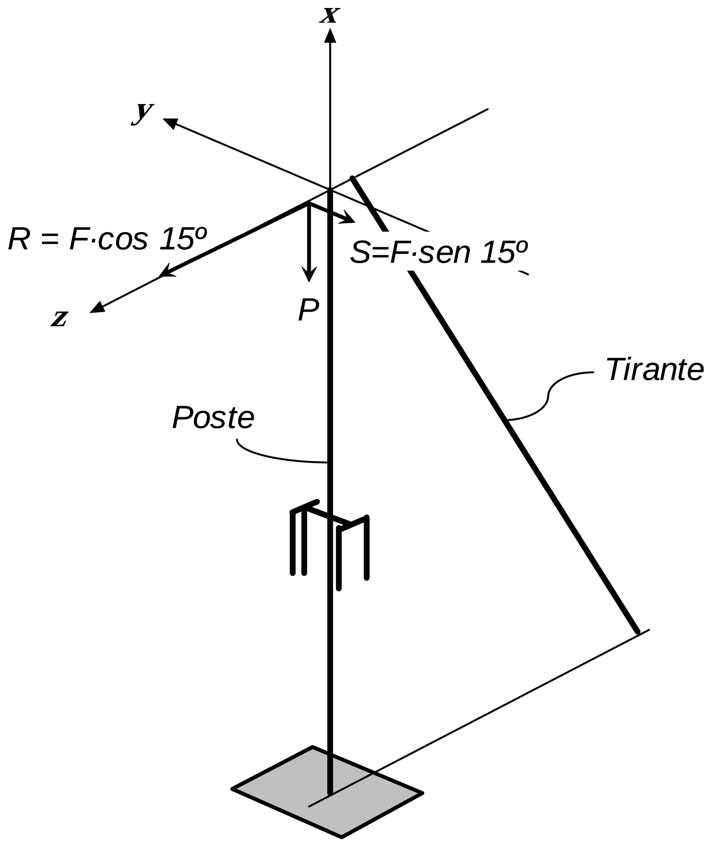
$$\tau = \frac{15{,}3 \cdot 10^3\ N}{\frac{\pi}{4} \cdot 20^2\ mm^2} = 48{,}7\ MPa < 50\ MPa \ \text{(cumple)}$$

La carga Q se transmite al bloque en el que están insertados los pasadores verticales y la componente vertical P es absorbida por la chapa horizontal inferior, como se muestra en la figura siguiente (dibujo en el plano de la polea).

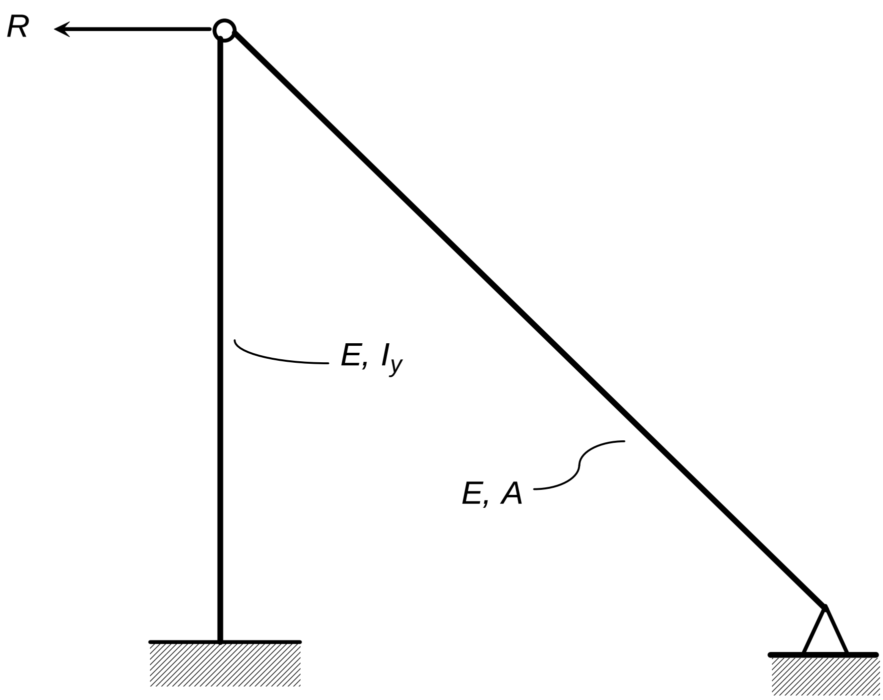


Cada uno de los dos pasadores **verticales**, por tanto, sólo está sometido a la componente horizontal (15 kN), que es inferior a la que sufren los pasadores horizontales y por ello también cumplen el requisito. (3 puntos)

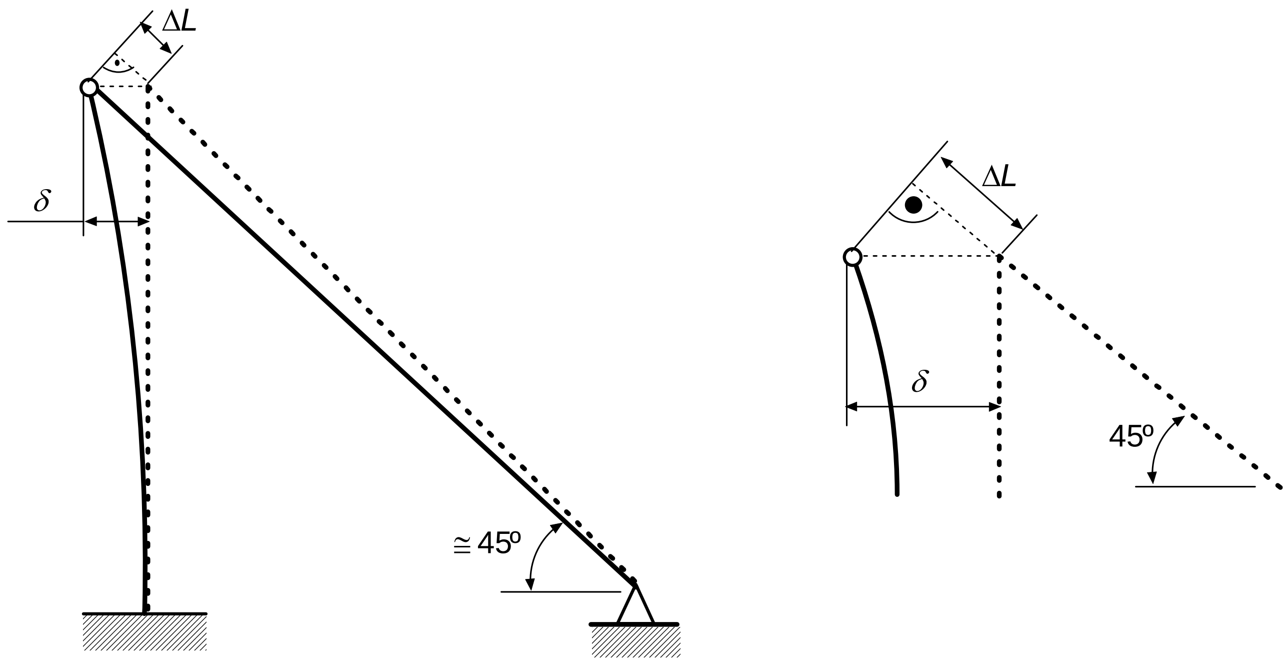
2.- Las fuerzas que actúan sobre el conjunto tirante + poste son las siguientes:



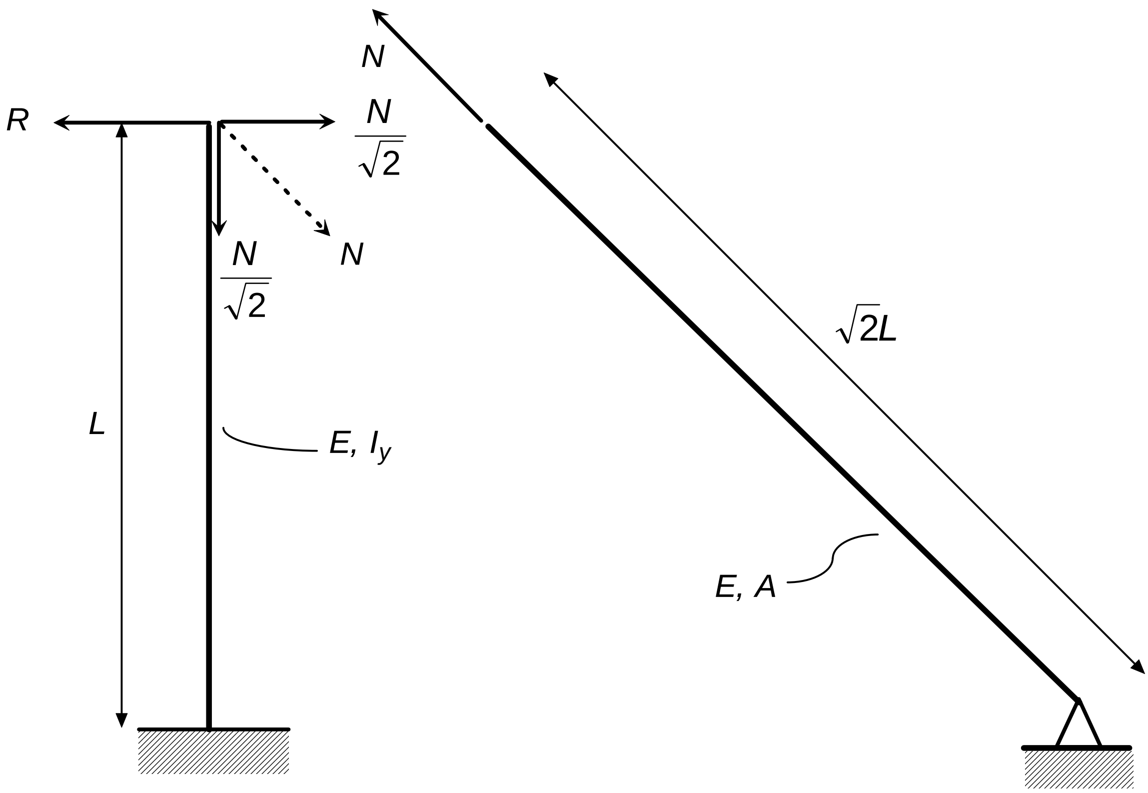
Para obtener las fuerzas que actúan sobre el poste, es preciso determinar la acción del tirante, resolviendo el sistema hiperestático de grado 1 en el plano xz (por simplicidad se desprecian las distancias entre las articulaciones superiores y se suponen en la línea media del poste *Ver nota 1*). (2 puntos)



La condición de compatibilidad de las deformaciones se expresa, apoyándose en la figura siguiente, como: La proyección del desplazamiento por flexión de la cabeza del poste en la dirección del tirante, debe coincidir con el alargamiento del tirante $\delta = \sqrt{2}\Delta L$.



Aislando los dos miembros de la estructura:



El alargamiento del cable y la flecha del poste son:

$$\Delta L = \frac{N\sqrt{2}L}{EA}$$

$$\delta = \frac{\left(R - \frac{N}{\sqrt{2}}\right)L^3}{3EI_y}$$

Por tanto, la condición de compatibilidad queda:

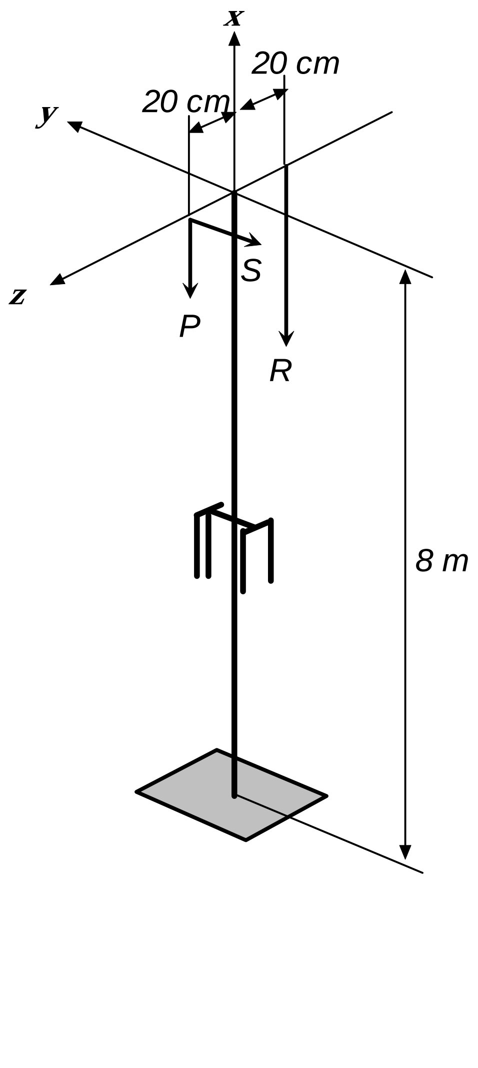
$$\delta = \sqrt{2}\Delta L \quad \rightarrow \quad \frac{\left(R - \frac{N}{\sqrt{2}}\right)L^3}{3EI_y} = \frac{2NL}{EA}$$

Operando:

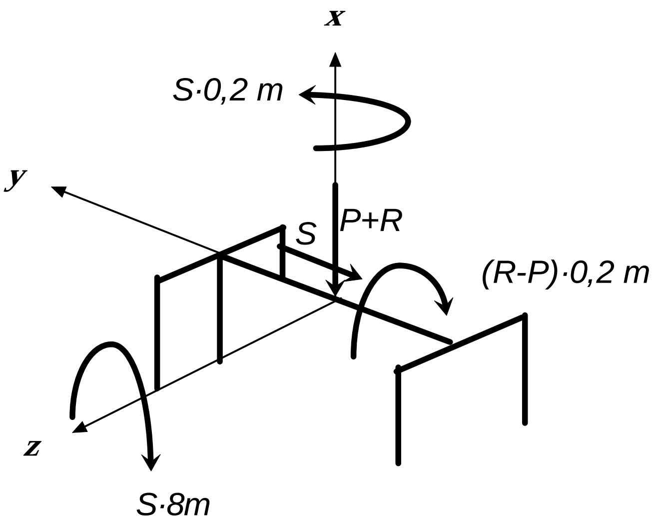
$$RL^2 = N\left(6\frac{I_y}{A} + \frac{L^2}{\sqrt{2}}\right)$$

Para el perfil HEB 200, I_y = 2·10^3 cm^4. Para el tirante, A = 3,1 cm^2. Como $L^2 = 6{,}4 \cdot 10^5\ cm^2$, entonces $6\frac{I_y}{A} << \frac{L^2}{\sqrt{2}}$ y $N \cong \sqrt{2}R$: Las componentes horizontal y vertical del tirante son iguales a R. (8 puntos)

Las fuerzas sobre la cabeza del poste quedan:

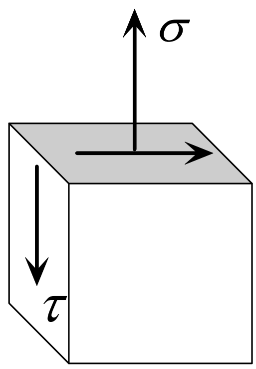


En todas las secciones del poste hay N, M_y y M_T constantes. M_z es variable, siendo máximo en el empotramiento. El empotramiento es la sección más desfavorable, y los esfuerzos son:



(1 punto)

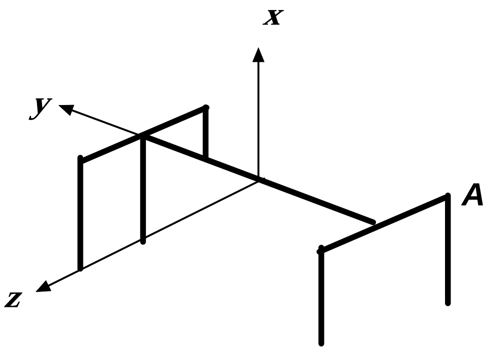
Así, en el perfil se tiene un estado tensional de flexión compuesta y torsión (se desprecia la tensión debida al esfuerzo cortante debido a la gran relación longitud/canto del poste *Ver nota 2*):

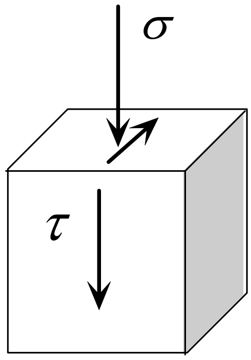


La tensión equivalente de Tresca es:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

En el punto A del perfil se alcanza simultáneamente el mayor valor de σ^2 y de τ^2.





Los valores numéricos de las fuerzas son:

$$P = 6\ kN \quad R = 30\ kN \cdot \cos 15^{o} = 29\ kN \quad S = 30\ kN \cdot sen 15^{o} = 7{,}8\ kN$$

Los valores numéricos de los esfuerzos en el empotramiento son:

$$N = -(P + R) = -35\ kN \quad M_y = (R - P) \cdot 0{,}2\ m = 4{,}6\ kN \cdot m$$
$$M_z = -S \cdot 8\ m = -62{,}4\ kN \cdot m \quad M_T = S \cdot 0{,}2\ m = 1{,}6\ kN \cdot m$$

(1 punto)

Las expresiones de las tensiones en el punto A, son:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$
$$\tau = \frac{M_T}{I_t} e_1$$

Sustituyendo los parámetros geométricos del perfil HEB 200:

$$\sigma_x = \frac{-35 \cdot 10^3\ N}{78{,}1 \cdot 10^2\ mm^2} - \frac{4{,}6 \cdot 10^6\ N \cdot mm}{200 \cdot 10^3\ mm^3} + \frac{-62{,}4 \cdot 10^6\ N \cdot mm}{570 \cdot 10^3\ mm^3}$$
$$\tau = \frac{1{,}6 \cdot 10^6\ N \cdot mm}{63{,}4 \cdot 10^4\ mm^4} 15\ mm$$

Los valores numéricos son:

$$\sigma_x = -4{,}5\ MPa - 23\ MPa - 109{,}5\ MPa = -137\ MPa$$
$$\tau = 38\ MPa$$

La tensión equivalente de Tresca:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{137^2 + 4 \cdot 38^2} = 157\ MPa > 92 = \frac{275}{3} \text{ (no cumple)}$$

(4 puntos)

Nota 1: Si no se considerasen las dos articulaciones superiores colocadas en el mismo punto, a la flecha debida a las cargas transversales habría que sumarle la flecha debida al par puntual creado por la componente vertical del tirante y por las pesas. En tal caso, la ecuación de compatibilidad quedaría como:

$$\frac{N\sqrt{2}L}{EA}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\left(R - \frac{N}{\sqrt{2}}\right)L^3}{3EI_y} - \frac{\left(\frac{N}{\sqrt{2}} - P\right) \cdot 0{,}2m \cdot L^2}{2EI_y}$$

Como $\frac{0{,}2m}{2} = 0{,}1 << \frac{L}{3} = 2{,}7m$ *y R = 5P, entonces la segunda fracción puede despreciarse frente a la primera (puede aceptarse la aproximación de que ambas articulaciones se encuentran en el mismo punto).*

Nota 2: $\tau_{máx}$ *debida al esfuerzo cortante vale 5 MPa (Se confirma que es despreciable)*