RESISTENCIA DE MATERIALES II. CURSO 2010-11
EXAMEN DE JUNIO. 2-6-2011

Solución EJERCICIO 1. 10 CUESTIONES

1.- Un eje transmite un par torsor *M=1.000kgf·m*. Calcular las dimensiones mínimas de la sección transversal del eje en dos casos:

a) Cuando el eje es macizo de sección circular

b) Cuando el eje es un tubo cuya relación entre diámetros exterior e interior es *8/7*

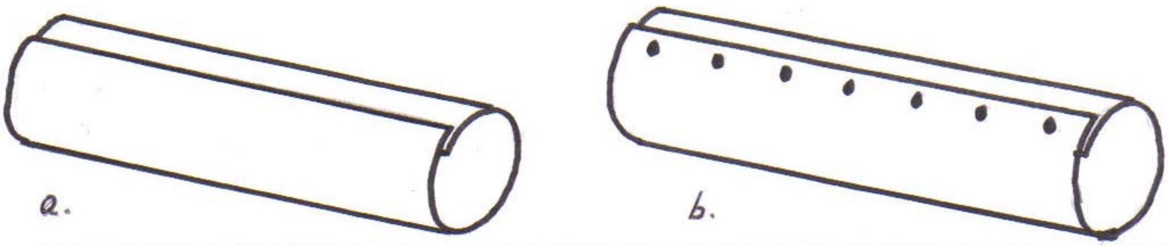
Dato: $\tau_{adm} = 600 kgf / cm^2$

$$a)\quad \tau_{max} = \frac{M}{I_0}\frac{\phi}{2} = \frac{32M}{\pi\phi^4}\frac{\phi}{2} = \frac{16M}{\pi\phi^3} \leq \tau_{adm} \;;\quad \phi_{min} = \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi\tau_{adm}}} = 9{,}47\,cm$$

$$b)\quad \tau_{max} = \frac{M}{I_0}\frac{\phi_e}{2} = \frac{32M}{\pi\phi_e^4(1-(7/8)^4)}\frac{\phi_e}{2} = \frac{16M}{\pi\phi_e^3(1-(7/8)^4)} \leq \tau_{adm} \qquad \left(\frac{\phi_e}{\phi_i} = \frac{8}{7}\right)$$

$$\phi_{e\,min} = \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi\tau_{adm}(1-(7/8)^4)}} = 12{,}71\,cm$$

2.- Partiendo de chapa de espesor *δ* se construyen dos tubos del mismo diámetro medio *Φ.* En el primer tubo los bordes de la chapa son libres, mientras que en el segundo están unidos con remaches. Si ambos tubos van a estar sometidos a un mismo par torsor, determinar la relación entre los ángulos de torsión, θ_b / θ_a



a) Perfil abierto de longitud l : $\theta_a = \int_0^l \frac{M_T}{G I_T} dx = \int_0^l \frac{M_T}{G \frac{1}{3}\delta^3\pi\phi} dx = \frac{3M_T}{G\delta^3\pi\phi}$

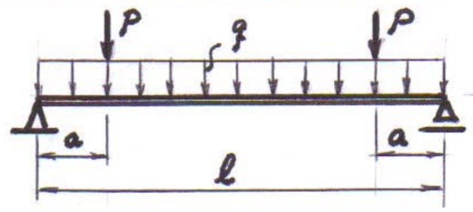
$$I_T = \frac{1}{3}\int_s e^3 ds = \frac{1}{3}\delta^3\pi\phi$$

b) Perfil cerrado de longitud l : $\theta_b = \int_0^l \frac{M_T}{G I_T} dx = \int_0^l \frac{M_T}{G\delta\pi\phi^3/4} dx = \frac{4M_T}{G\delta\pi\phi^3} l$

$$I_T = \frac{4A^{*2}}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4(\pi\phi^2/4)^2}{\pi\phi/\delta} = \frac{\delta\pi\phi^3}{4}$$

$$\boxed{\frac{\theta_b}{\theta_a} = \frac{4\delta^2}{3\phi^2}}$$

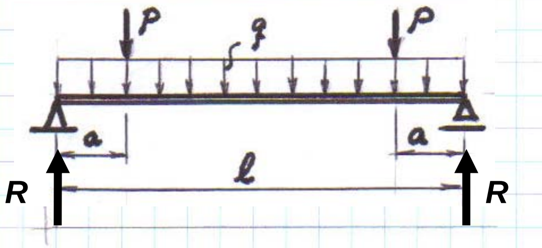
3.- Para la viga de la figura, determinar el mínimo perfil IPN necesario con un coeficiente de seguridad iguala a 3.



Datos: $P = 20kN$; $q = 2kN/m$; $\sigma_{adm} = 300MPa$

$a = 1m$; $\ell = 6m$

El momento flector máximo se da en la sección central:



$$M_{max} = R\frac{\ell}{2} - P\left(\frac{\ell}{2} - a\right) - q\,\frac{\ell}{2}\,\frac{\ell}{4} = 29\,m\cdot kN$$

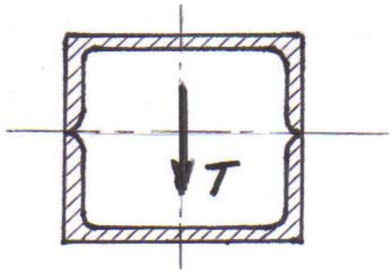
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \le \frac{\sigma_{adm}}{n}$$

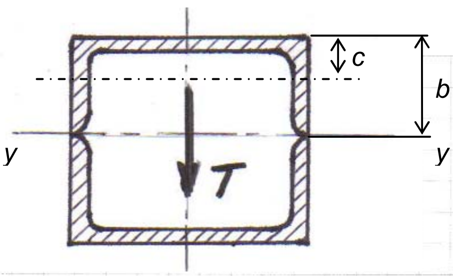
$$2R = 2P + q\ell \rightarrow R = P + \frac{q\ell}{2} = 26\,kN$$

$$W \ge \frac{M_{max}\cdot n}{\sigma_{adm}} = \frac{29\,m\,kN\cdot 3}{300\,MPa} = 290\,cm^3$$

TABLAS: IPN-240 ($W = 354\,cm^3$)

4.- Una viga está constituida por dos perfiles UPN-140 soldados por las alas en toda su longitud. Si el espesor de la garganta de los cordones es de *5mm* y su resistencia es $\tau_{adm} = 200MPa$, hallar el máximo esfuerzo cortante ***T*** compatible con la resistencia de la soldadura





Tablas UPN-140:

$b = 60mm$ $c = 1,75cm$

$A_v = 20,4\,cm^2$ $I_{y_v} = 62,7\,cm^4$

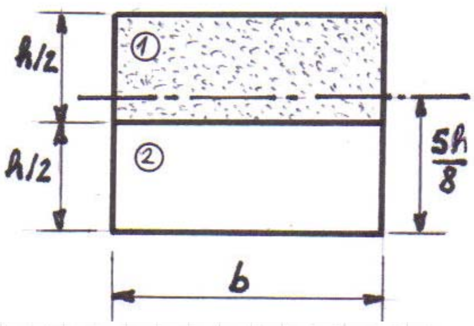
Espesor de la garganta de los cordones de soldadura (continuos): $a = \frac{1}{2}\,\frac{T\cdot\mathcal{M}}{\tau_{adm}\,I} = 5mm$

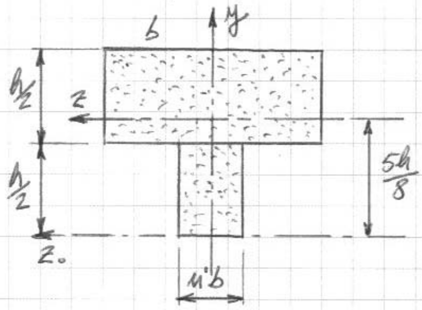
Momento estático de la porción de sección sujeta por la soldadura: $\mathcal{M} = A(b-c) = 86,7\,cm^3$

Momento de inercia de toda la sección: $I = 2\left(I_{y_v} + A_v(b-c)^2\right) = 862,35\,cm^4$

El esfuerzo cortante máximo es: $T_{max} = \frac{2\,a\,\tau_{adm}\,I}{\mathcal{M}} = 198,9\,kN$

5.- En una viga compuesta de dos materiales de módulos de Young E_1 y E_2 , respectivamente, se comprueba experimentalmente que, sometida a flexión pura, presenta el eje neutro indicado en la figura de la sección recta. Hallar la relación entre los módulos, $n = E_1 / E_2$,



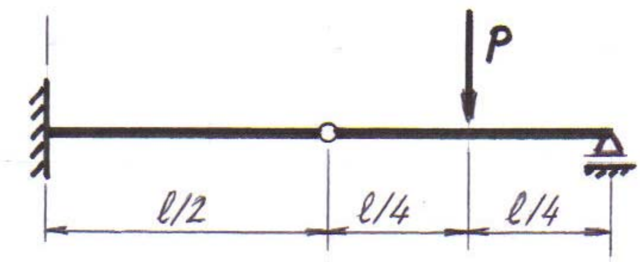


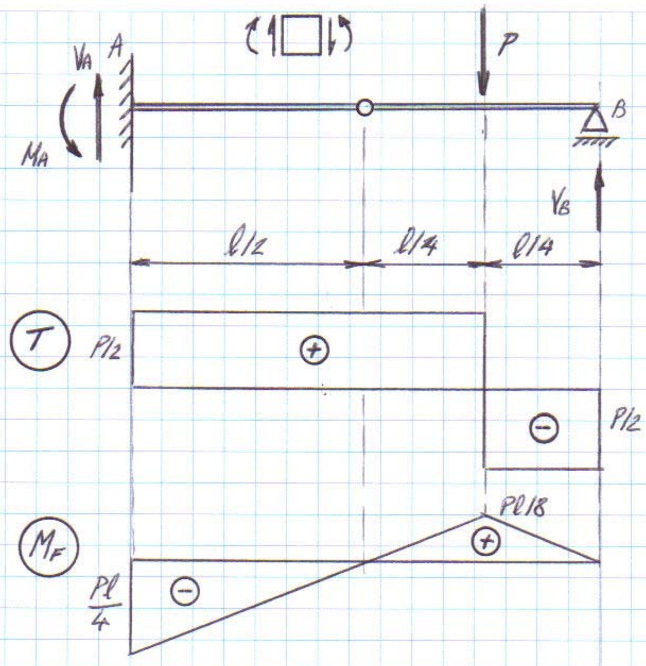
Momento estático respecto a Z_0 de la sección equivalente:

$$M_{Z_0} = b\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{4}\right) + n' b\,\frac{h}{2}\,\frac{h}{4} = \left(b\frac{h}{2} + n' b\frac{h}{2}\right)\overline{ZZ_0}$$

Como $\overline{ZZ_0} = \frac{5h}{8}$, se despeja: $n' = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$

6.- Para la viga de la figura se piden los diagramas acotados de esfuerzos cortantes y de momentos flectores





Equilibrio.

$V_A + V_B = P$

Momentos en la rótula:

$V_A \frac{l}{2} - M_A = 0$

$V_B \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl}{4} = 0$

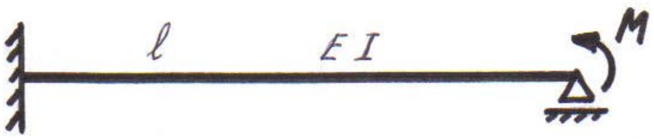
De donde:

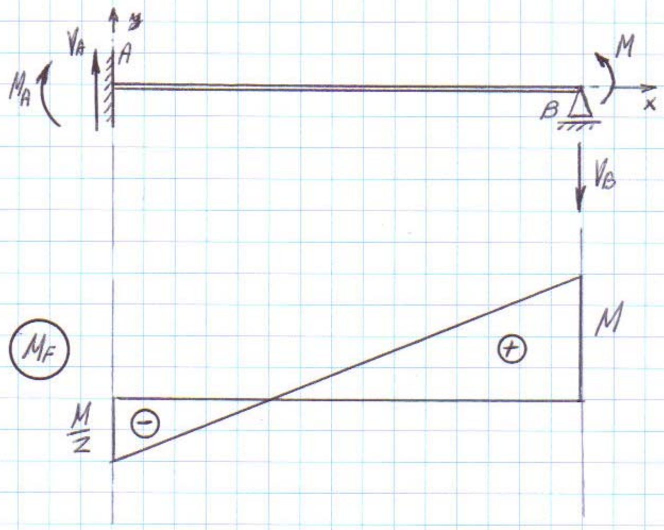
$V_B = P/2$

$V_A = P - V_B = P/2$

$M_A = V_A\, l/2 = Pl/4$

7.- Para la viga de la figura se pide la ecuación universal de la elástica y el diagrama acotado de momentos flectores





Equilibrio: $V_A = V_B$

$M_A - M + V_B l = 0$

Ecuación universal:

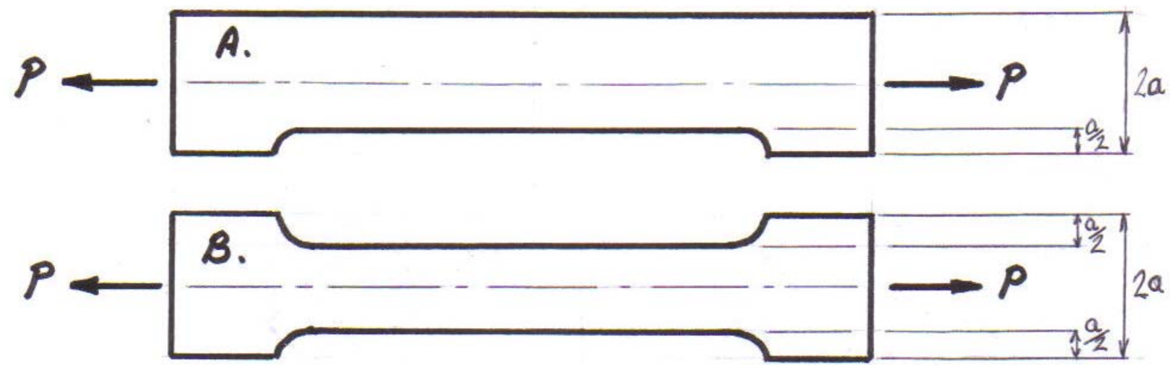
$EIy = \cancel{EIy_0} + \cancel{EI\theta_0}x + \frac{M_A}{2}x^2 + \frac{V_A}{6}x^3$

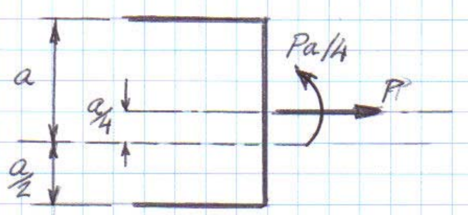
$EIy(l) = \frac{M_A}{2}l^2 + \frac{V_A}{6}l^3 = 0$, que, con las ecuaciones de equilibrio, lleva a:

$V_A = V_B = 3M/2l$

$M_A = -M/2$

8.- Dos barras del mismo material, de sección rectangular y pequeño espesor están sometidas a tracción tal como se indica en la figura (nótese que las secciones centrales de la barra ***A*** están sometidas a flexión compuesta). Hallar la relación σ_A / σ_B entre las tensiones máximas que aparecen en ambas barras





Esfuerzos en las secciones centrales de la barra A:

$N = P$; $M_F = Pa/4$

La tensión máxima es de tracción y se da en el borde inferior:

$$\sigma_{max\,A} = \frac{N}{A} + \frac{M_F}{W} = \frac{P}{3a/2 \cdot e} + \frac{Pa/4}{\frac{1}{12}e\left(\frac{3a}{2}\right)^3} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{4P}{3ae}$$

Tensión en las secciones centrales de la barra B: $\sigma_B = \frac{P}{ae}$

Luego: $\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{4P/3ae}{P/ae} = \frac{4}{3}$

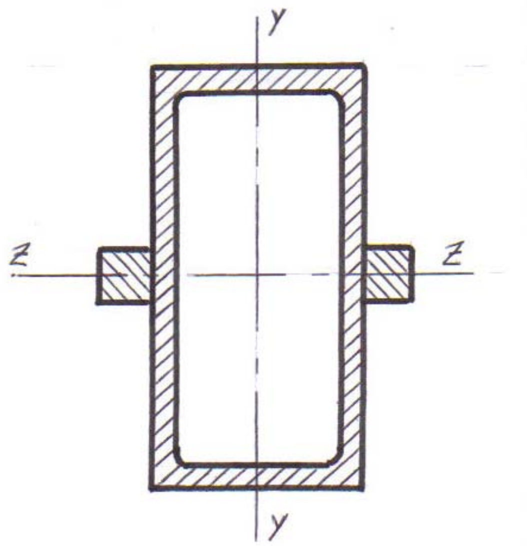
9.- Hallar la expresión de la energía elástica por unidad de longitud en un tramo recto de una tubería sometida a presión interna uniforme ***p*** .
Datos: Diámetro medio: *D* . Espesor: *e* . Características del material constituyente: *E* , ν

Tensiones de membrana: $\sigma_m = \dfrac{p\cdot D/2}{2e} = \dfrac{pD}{4e} = \sigma_2$ $\qquad \sigma_t = \dfrac{p D/2}{e} = \sigma_1$

Energía elástica por unidad de longitud: $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = \dfrac{1}{2}\iint \dfrac{1}{2E}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cancel{\sigma_3^2}-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\cancel{\sigma_2\sigma_3}+\cancel{\sigma_3\sigma_1})\right)dA =$

$$= \frac{1}{4E}\iint\left(\frac{p^2D^2}{4e^2}+\frac{p^2D^2}{16e^2}-2\nu\frac{p^2D^2}{8e^2}\right)dA = \frac{p^2D^3\pi}{16Ee}\left(\frac{5}{4}-\nu\right)$$

10.- Para mejorar la resistencia al pandeo de un soporte tubular *80·40·3* se sueldan dos barras de sección cuadrada de *10x10mm* , quedando la sección recta tal como se indica en la figura. Comprobar que el plano de pandeo sigue siendo el *xy* y hallar el factor por el que se incrementa la carga crítica



Tablas 80·40·3 : $I_z = 51\,cm^4$ $\quad I_y = 17{,}2\,cm^4 = I_{min} \rightarrow$ Plano de pandeo: xz

Con los refuerzos:

$$I_y' = I_y + 2\left(\frac{1}{12}1\cdot1^3 + 1\cdot1\cdot(2+0{,}5)^2\right) = 29{,}87\,cm^4$$

($I_y' < I_z$, luego el plano de pandeo sigue siendo el xz)

$$\left.\begin{aligned} P_{crit}\ (\text{sin refuerzos}) &= \frac{\pi^2 E I_y}{l_p^2} = \frac{\pi^2 E}{l_p^2}\cdot 17{,}2 \\ P_{crit}\ (\text{con refuerzos}) &= \frac{\pi^2 E I_y'}{l_p^2} = \frac{\pi^2 E}{l_p^2}\cdot 29{,}87 \end{aligned}\right\}\quad \frac{P_{crit}\ (\text{con refuerzos})}{P_{crit}\ (\text{sin refuerzos})} = \frac{29{,}87}{17{,}2} = 1{,}727$$