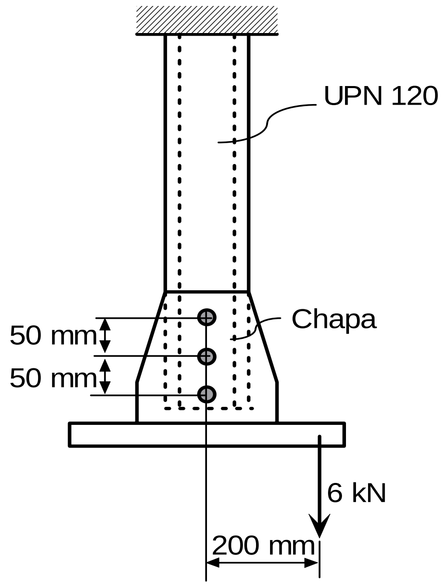
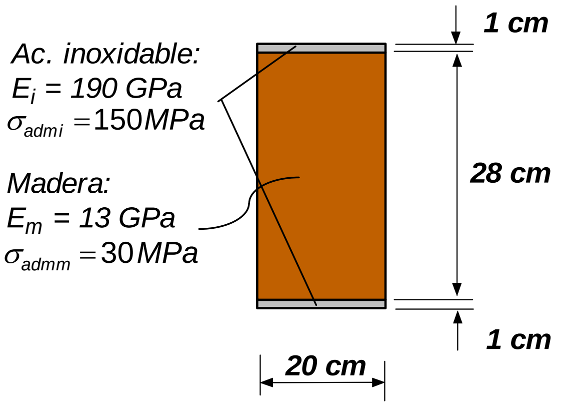
RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2011-12**
EXAMEN DE ENERO **26-1-2012**
Fecha de publicación de la preacta: 9 de Febrero
Fecha de revisión: 15 de Febrero a las 11 horas

CUESTIONES (10 puntos)

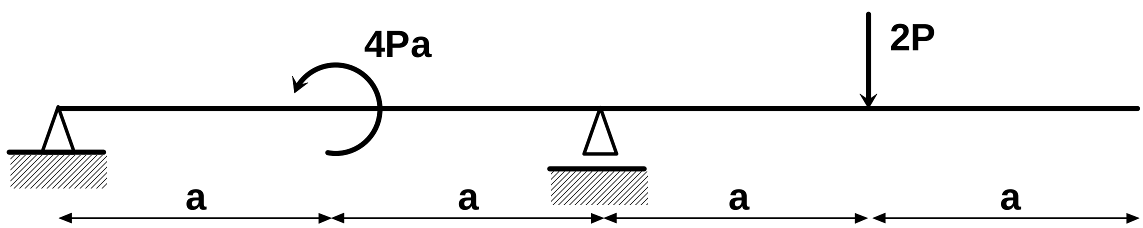
1.- (1 punto) Obtenga la tensión cortante y la tensión de aplastamiento máximas en la unión de la figura (Diámetro de los elementos: 16 mm. Espesor de chapa: 10 mm).





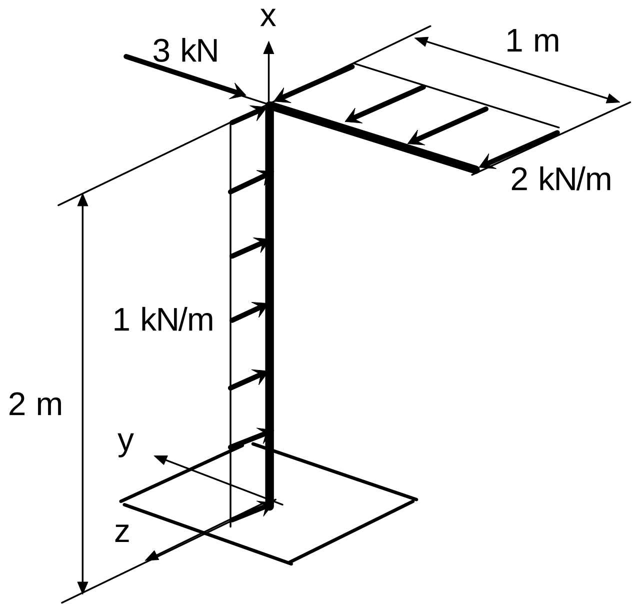
2.- (1,5 puntos) Calcule el momento flector máximo que se puede aplicar a la sección compuesta de la figura, si éste se aplica según el eje de mayor momento de inercia.

3.- (1 punto) Obtenga, razonadamente, la deformada a estima de la viga de la figura. Indique claramente (en caso de existir), los puntos de inflexión, tramos rectos y curvaturas.

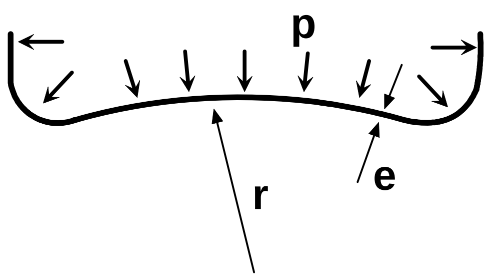


4.- (1 punto) Halle el núcleo central de la sección para un perfil normalizado IPE 120.

5.- (2 puntos) Calcule, indicando claramente en qué punto o puntos de la sección aparece, el valor máximo de la tensión equivalente de Tresca en la base del semipórtico de la figura, si el perfil es un 140.60.4 y está colocado de modo que el eje z coincide con el eje de mayor momento de inercia de la sección (Desprecie los radios de acuerdo de la sección).



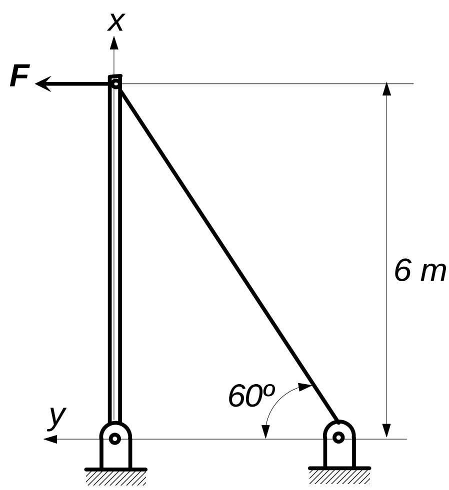
6.- (1 punto) Obtenga la lectura que dará una galga extensométrica colocada en la superficie exterior del fondo esférico de una lata de refresco sometida a presión interna p. Datos del material: E, ν.



7.- (2,5 puntos) En la estructura de la figura no está impedido el pandeo fuera de su plano y en los apoyos hay pasadores cilíndricos. La barra vertical es un perfil HEB 140.

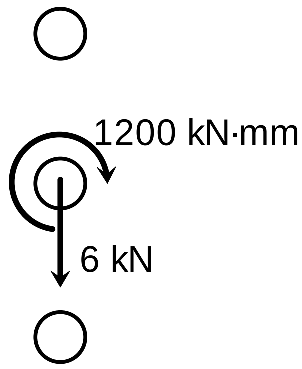
a.- ¿Con cuál de los ejes (y ó z), debe hacerse coincidir el eje de mayor momento de inercia del perfil para que la estructura admita un mayor valor de la carga F?

b.- Calcule el valor de dicha carga (acero S235), con un factor de seguridad de 10 frente a la fórmula de Euler, comprobando que ésta es aplicable.

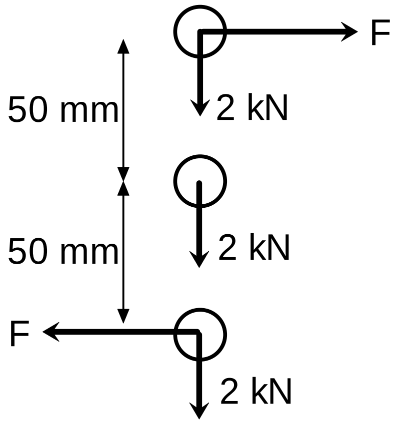


RESOLUCIÓN DE LAS CUESTIONES

1.- Las resultantes sobre el centro de gravedad de la unión son:



Cada elemento sufre una acción debida a la carga y otra debida al par. Como todos los elementos tienen la misma sección, la componente debida a la carga es 1/3 de ésta. Por el mismo motivo, la componente debida al par sólo depende de la distancia al centro de gravedad y es normal al radio vector que une éste con cada elemento. Así, las acciones de la chapa sobre los elementos de unión son:

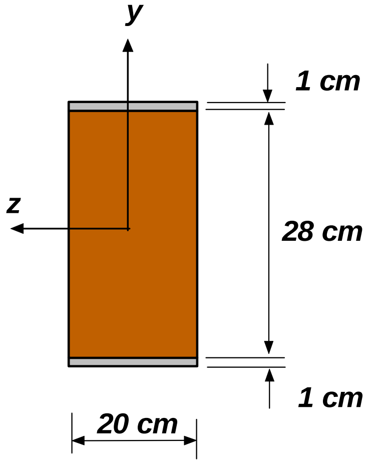


Por equilibrio de momentos: 2F·50 mm = 1200 kN·mm, de donde F = 12 kN.

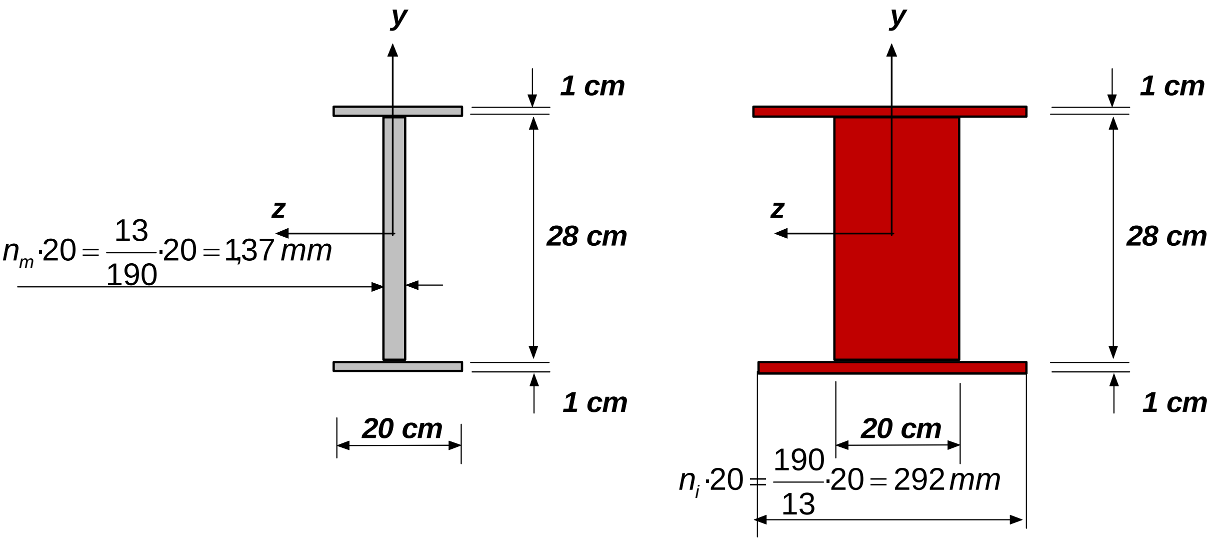
La resultante sobre los dos pasadores más desfavorables es $T = \sqrt{2^2 + 12^2} = 12{,}2\, kN$, y como sólo hay una sección de cada pasador sometida a cortadura, entonces $\tau_{máx} = \dfrac{12{,}2 \cdot 10^3 N}{\frac{\pi}{4} \cdot 16^2 mm^2} = 61\, MPa$. (0,5 puntos)

La tensión máxima de aplastamiento se da en el UPN, cuyo espesor (7 mm) es inferior al de la chapa $\sigma_{máx} = \dfrac{12{,}2 \cdot 10^3 N}{7 \cdot 16\ mm^2} = 109\ MPa$ (0,5 puntos)

2.- Las secciones “sándwich” como la del enunciado se caracterizan por ser mucho más rígidas en el eje paralelo a las láminas exteriores (“o pieles”), por lo que es esperable que su momento de inercia respecto a este eje (denominado z en adelante) sea muy superior al de la otra dirección. El ejercicio se resuelve asumiendo esta hipótesis, que se demuestra en la nota al final de la resolución del ejercicio, y que no se ha exigido al calificar.



La sección equivale a otra sólo de madera o sólo de acero inoxidable:



Inoxidable Madera

Los momentos de inercia de la sección transformada son:

$$I_{z\ st\ (m)} = \frac{1}{12}\left(20 \cdot 30^3 - 18{,}63 \cdot 28^3\right) = 10919\ cm^4$$

$$I_{z\ st\ (i)} = \frac{1}{12}\left(292{,}3 \cdot 30^3 - 272{,}3 \cdot 28^3\right) = 157592\ cm^4$$

(0,5 puntos)

Las tensiones máximas en cada material son:

- Transformación a inoxidable:

$$\left|\sigma_{x\ máx\ madera}\right| = \frac{13}{190} \frac{\left|Mz\right|_{máx}}{10919\ cm^4} \cdot 14\ cm < 30 \cdot 10^2\ \frac{N}{cm^2} \quad \rightarrow \quad \left|Mz\right|_{máx} < 34{,}2 \cdot 10^6\ N \cdot cm$$

$$\left|\sigma_{x\ máx\ inox}\right| = \frac{\left|Mz\right|_{máx}}{10919\ cm^4} \cdot 15\ cm < 150 \cdot 10^2\ \frac{N}{cm^2} \quad \rightarrow \quad \left|Mz\right|_{máx} < 10{,}9 \cdot 10^6\ N \cdot cm$$

El mayor momento que puede aplicarse es el mínimo de los calculados

(1 punto)

- Transformación a madera:

$$\left|\sigma_{x\ máx\ madera}\right| = \frac{\left|Mz\right|_{máx}}{157592\ cm^4} \cdot 14\ cm < 30 \cdot 10^2\ \frac{N}{cm^2} \quad \rightarrow \quad \left|Mz\right|_{máx} < 34{,}2 \cdot 10^6\ N \cdot cm$$

$$\left|\sigma_{x\ máx\ inox}\right| = \frac{13}{190}\frac{\left|Mz\right|_{máx}}{157592\ cm^4} \cdot 15\ cm < 150 \cdot 10^2\ \frac{N}{cm^2} \quad \rightarrow \quad \left|Mz\right|_{máx} < 10{,}9 \cdot 10^6\ N \cdot cm$$

Nota: *La transformación de la sección tal y como se ha realizado anteriormente es válida para momento aplicado según el eje z y equivale a calcular el momento de inercia de la sección transformada (si esta se transforma a madera) como* $I_{z\ st\ (m)} = I_{z\ m} + n_i \cdot I_{z\ i}$*, siendo* $I_{z\ m}$ *e* $I_{z\ i}$ *los momentos de inercia de madera e inoxidable con sus dimensiones reales y cuyo resultado es el ya calculado anteriormente. La demostración se hizo en la teoría del tema de secciones compuestas.*

Sin embargo, para momentos aplicados según el eje y es preciso desarrollar la expresión de $I_{y\ st}$*. Para ello, hay que resolver el problema con hiperestaticidad interna de primer grado en flexión que supone aplicar un par M a la sección compuesta del enunciado. Parte de este par (*M_m*) hará flectar la madera y la otra parte (*$M-M_m$*) lo hará con el inoxidable, dando lugar a curvaturas de sus líneas medias* $w''_m = \dfrac{M_m}{E_m \cdot I_{y\ m}}$ *y* $w''_i = \dfrac{M - M_m}{E_i \cdot I_{y\ i}}$.

Si se emplea la condición de compatibilidad de que ambas curvaturas son iguales, entonces de aquí se despeja el valor de M como función de las rigideces a flexión y de M_m*.*

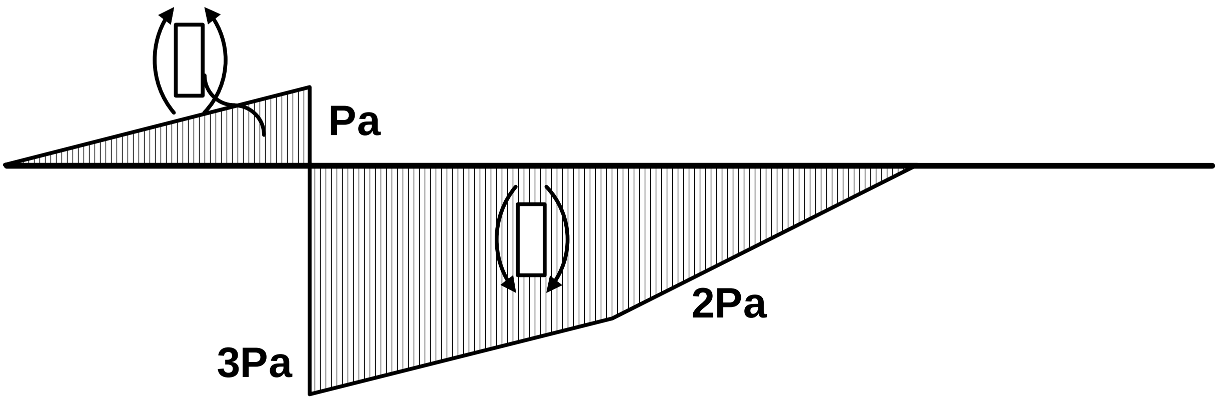
Si la sección compuesta, solicitada por M, se transforma enteramente a madera, entonces la curvatura de su línea media es $w'' = \dfrac{M}{E_m \cdot I_{y\ st\ (m)}}$*. Sustituyendo aquí el valor de M ya obtenido e igualando esta curvatura a* w''_m*, el resultado es que, cuando la sección se transforma a madera su momento de inercia equivalente es* $I_{y\ st\ (m)} = I_{y\ m} + n_i \cdot I_{y\ i}$*, siendo* $I_{y\ m}$ *e* $I_{y\ i}$ *los momentos de inercia de madera e inoxidable con sus dimensiones reales. Si se realiza el cálculo, se obtiene* $I_{y\ st} = 2610\ cm^4$*, muy inferior al valor calculado para el otro eje. La demostración es análoga si se transforma a inoxidable.*

No es válido*, por tanto, calcular* $I_{y\ st\ (m)}$ *a partir de la sección transformada para momento según el eje z.*

3.- Reacción en el apoyo derecho:

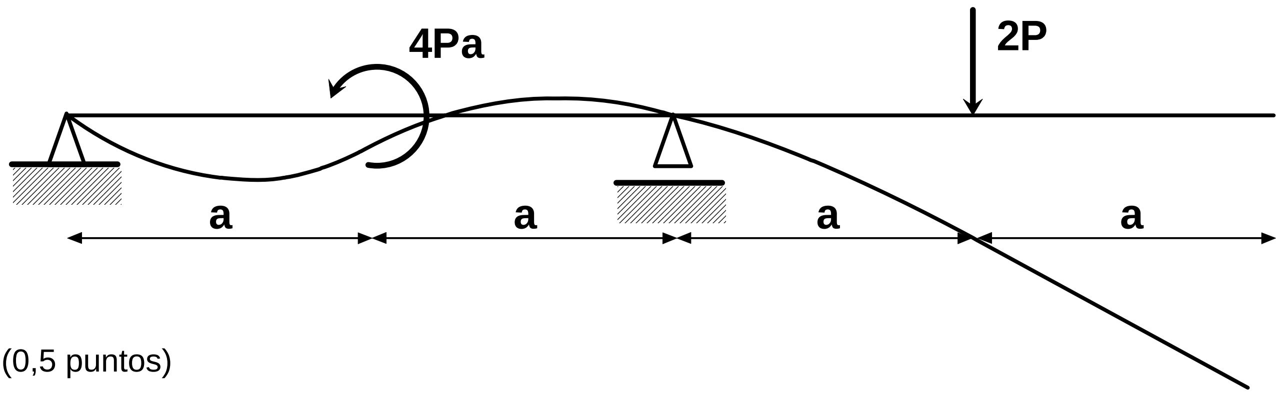
$$4Pa + V \cdot 2a - 2P \cdot 3a = 0 \quad \rightarrow \quad V = P \text{ (ascendente)}$$

Diagrama de momento flector:



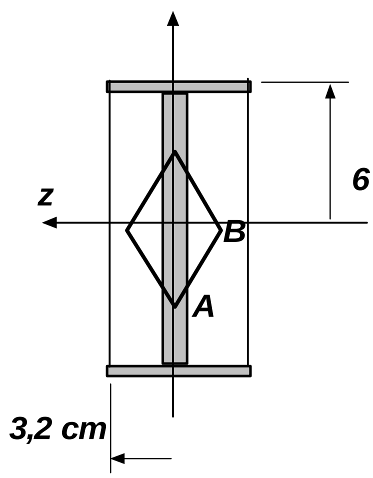
(0,5 puntos)

Posible deformada:



(0,5 puntos)

4.- El dominio convexo mínimo de la sección es un rectángulo, por lo que el núcleo central es un rombo simétrico. Se buscan los centros de presiones A y B. El resto son simétricos.



Ecuación del eje neutro en función del centro de presiones y_c, z_c:

$$1 + \frac{y_c}{i_z^2}\,y + \frac{z_c}{i_y^2}\,z = 0$$

IPE 120: $i_y = 1{,}45\ cm \quad i_z = 4{,}9\ cm$

Punto A:

Recta horizontal superior: $y = 6\ cm \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{y}{6} = 0$

Identificando coeficientes entre la ecuación del eje neutro y la de la recta horizontal superior:

$$-\frac{1}{6}=\frac{y_c}{4{,}9^2} \quad \rightarrow \quad y_c=-4\ cm \qquad \text{(0,5 puntos)}$$
$$z_c=0$$

Punto B:

Recta vertical izquierda: $z=3{,}2\ cm \quad \rightarrow \quad 1-\frac{z}{3{,}2}=0$

Análogamente: $$-\frac{1}{3{,}2}=\frac{y_c}{1{,}45^2} \quad \rightarrow \quad z_c=-0{,}65\ cm \qquad \text{(0,5 puntos)}$$
$$y_c=0$$

5.- En la sección de la base los esfuerzos son de flexión y torsión (se desprecian los cortantes, que darán tensiones muy bajas y además sus máximos no se dan en los mismos puntos en los que aparecen los máximos de flexión y torsión):

$$M_y=1\cdot2\cdot1-1\cdot2\cdot2=-2\ kN\cdot m$$
$$M_z=-3\cdot2=-6\ kN\cdot m \qquad \text{(0,5 puntos)}$$
$$M_T=-2\cdot1\cdot0{,}5=-1\ kN\cdot m$$

Las tensiones serán de torsión y flexión, y la tensión equivalente de Tresca máxima, de valor $\sigma_{eq}=\sqrt{\left|\sigma\right|_{mx}{}^2+4\tau_{mx}{}^2}$, se dan aproximadamente en los puntos $\begin{cases} y=7cm \\ z=-3\ cm \end{cases}$ y $\begin{cases} y=-7cm \\ z=3\ cm \end{cases}$.

$$\left|\sigma\right|_{mx}=\frac{\left|Mz\right|}{W_z}+\frac{\left|My\right|}{W_y} \quad \rightarrow \quad \left|\sigma\right|_{mx}=\frac{6\cdot10^6\ N\cdot mm}{49{,}8\cdot10^3\ mm^3}+\frac{2\cdot10^6\ N\cdot mm}{30{,}9\cdot10^3\ mm^3}=185\ MPa$$

(1 punto)

$$\tau=\frac{M_T}{2eA^*} \quad \rightarrow \quad \tau=\frac{1\cdot10^6\ N\cdot mm}{2\cdot4mm\cdot136\cdot56mm2}=16{,}4\ MPa$$

$$\sigma_{eq}=\sqrt{\left|\sigma\right|_{mx}{}^2+4\tau_{mx}{}^2}=188\ MPa \quad \text{(0,5 puntos)}$$

6.- Por la simetría de la esfera, al entrar en la ecuación de Laplace con presión –p, ya que la presión se aplica en la cara convexa, y radios iguales a r, se tiene $\sigma_m=\sigma_t=\frac{-pr}{2e}$. En la cara exterior, $\sigma_z=0$. Aplicando las leyes de Hooke, $\varepsilon_m=\varepsilon_t=\frac{-pr}{2e}(1-\nu)$. (0,5 puntos)

Una galga colocada en el plano tangente a la superficie esférica (plano t-m), y que forme ángulo α con la dirección m, da una lectura $\varepsilon=\varepsilon_m\cos^2\alpha+\varepsilon_m sen^2\alpha$, es decir $\varepsilon=\varepsilon_m=\varepsilon_t$ (la lectura es independiente de la dirección en que se mida). (0,5 puntos)

7.- Se debe colocar el eje de mayor inercia en la dirección perpendicular al plano que tendría la mayor esbeltez si en ambos ejes hubiese la misma inercia (minimización de la esbeltez máxima).

Las esbelteces son $\lambda_y = \dfrac{2L}{i_y} \quad \lambda_z = \dfrac{L}{i_z}$, por ser el plano *zx* empotrado-libre y el *xy* articulado-articulado, ya que el pasador cilíndrico permite el giro sólo alrededor de *z* (plano *xy*) y que el tirante impide los desplazamientos de la punta del poste en la dirección *y*, pero no el giro alrededor de *z*.

Así, si los radios de giro fuesen iguales, *y* sería el eje con mayor esbeltez. Por ello pondremos en este eje el de mayor inercia de la sección (eje X de las tablas de perfiles) para dificultar el pandeo. (0,5 puntos)

Sin embargo colocar en este eje la mayor inercia no garantiza que no se produzca el pandeo en el plano *zx*. Es preciso calcular las esbelteces:

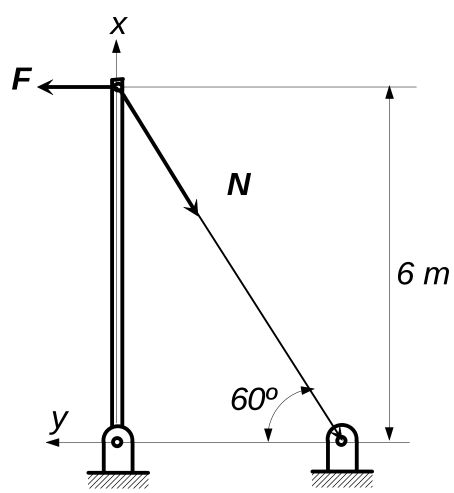
$$\lambda_y = \frac{2{\cdot}600\ cm}{5{,}93\ cm} = 202 \qquad \lambda_z = \frac{600}{3{,}58} = 167 \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Plano de pandeo: *zx*. Eje de giro: *y*.

Aplicabilidad de Euler:

$$\lambda_E = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi\sqrt{\frac{21000\ MPa}{235\ MPa}} = 93{,}9 \quad \rightarrow \quad 202 > 93{,}9 \text{ Euler es aplicable. (0,5 puntos)}$$

Imponiendo suma de momentos nula en el origen de coordenadas, y llamando N al esfuerzo normal sobre el cable, se tiene que:



$$\left(F - \frac{N}{2}\right){\cdot}6m = 0 \quad \rightarrow \quad N = 2F$$

La fuerza normal de compresión sobre la barra vertical es P_{apl} = N·cos 60º = $\sqrt{3}F$

La relación entre la carga crítica de Euler y la aplicada es el coeficiente de seguridad

$$n = \frac{P_{cr}}{P_{apl}} = 10 \quad \rightarrow \quad P_{cr} = 10\sqrt{3}F\,. \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Empleando la Fórmula de Euler:

$$10\sqrt{3}F = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_{máx}^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{\pi^2{\cdot}210000\ MPa{\cdot}43{\cdot}10^2\ mm^2}{10\sqrt{3}{\cdot}202^2} = 12625\ N \quad \text{(0,5 puntos)}$$