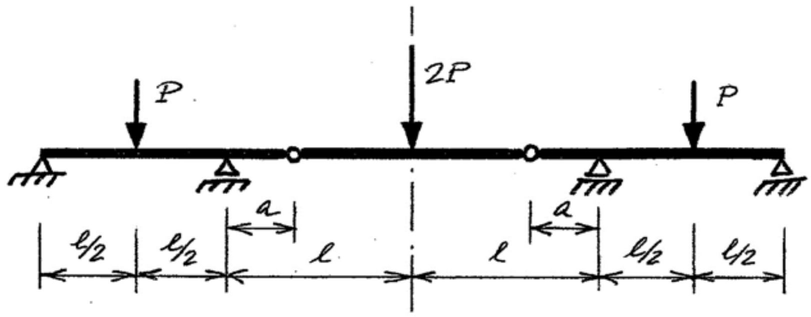
RESISTENCIA DE MATERIALES 2
Problema

La viga simétrica indicada en la figura, de longitud 4ℓ, tiene las articulaciones situadas a una distancia $0 \leq a \leq \frac{1}{2}\ell$ entre los apoyos interiores y la sección central.



Se pide:

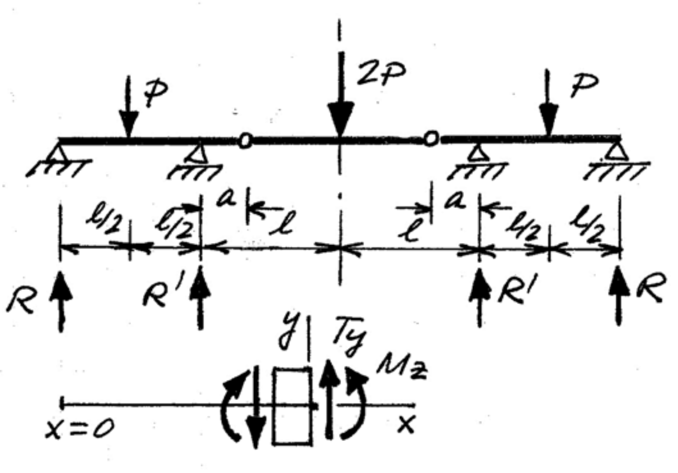
1. Leyes y diagramas de esfuerzos. (2 puntos)
2. Determinar el valor de a con el que se optimiza la sección de la viga. (2 puntos)

   En los siguientes apartados se considera $a=\frac{1}{2}\ell$, y la viga de sección constante.

3. Determinar el desplazamiento de la sección central. (3 puntos)
4. Si se añade un apoyo en la sección central, determinar las leyes y diagramas de esfuerzos. (2 puntos)
5. Dimensionar la sección con un perfil de la gama IPE para cada uno de los casos de sustentación, y determinar el desplazamiento de la sección central cuando no tiene apoyo, para los siguientes valores numéricos:
   P=25 kN ; ℓ=2a=2 m ; σ_{adm}=150 MPa ; E=200 GPa. (1 punto)

---

1) Por simetría las reacciones de los apoyos simétricos serán iguales. Utilizaremos como ejes locales y convenio de signos para los esfuerzos los indicados en la figura.



- Ecuación de equilibrio

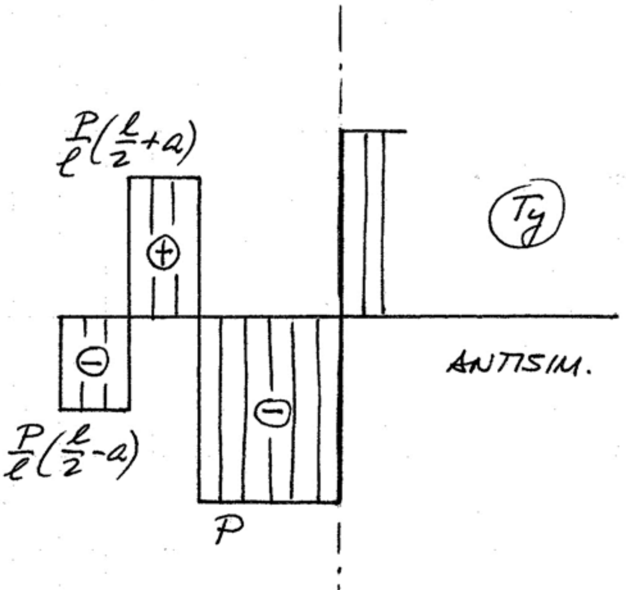
$$R + R' = 2P$$

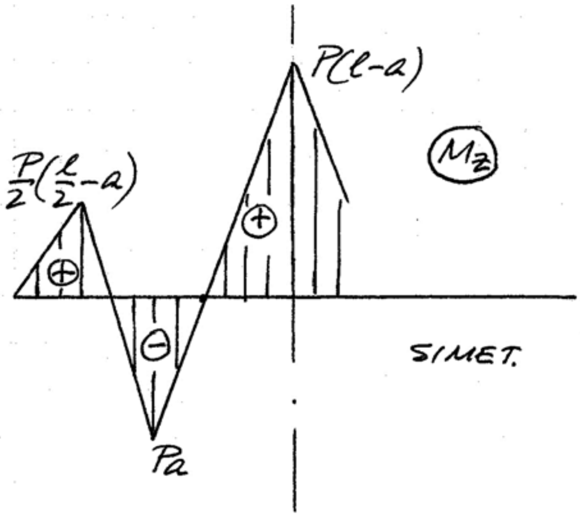
- Condición de articulación

$$M_z(\ell + a) = 0$$

$$R(\ell + a) + R'a - P\left(\frac{\ell}{2} + a\right) = 0$$

Resolviendo obtenemos:





$$\left(\begin{array}{ll} R=\frac{P}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}-a\right) & \geq 0 \\ R'=\frac{P}{\ell}\left(\frac{3\ell}{2}+a\right) & >0 \end{array} \right.$$

Las leyes de esfuerzos serán:

$0<x<2\ell$

$$\left(\begin{array}{l} T_y=-\frac{P}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}-a\right)+P\langle x-\frac{\ell}{2}\rangle^0 + \\ \qquad -\frac{P}{\ell}\left(\frac{3\ell}{2}+a\right)\langle x-\ell\rangle^0 \\ M_z=\frac{P}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}-a\right)x-P\langle x-\frac{\ell}{2}\rangle + \\ \qquad +\frac{P}{\ell}\left(\frac{3\ell}{2}+a\right)\langle x-\ell\rangle \end{array} \right.$$

$$M_z\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{P}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}-a\right)\frac{\ell}{2}=\frac{P}{2}\left(\frac{\ell}{2}-a\right)$$

$$M_z(\ell)=\frac{P}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}-a\right)\ell-P\frac{\ell}{2}=-Pa$$

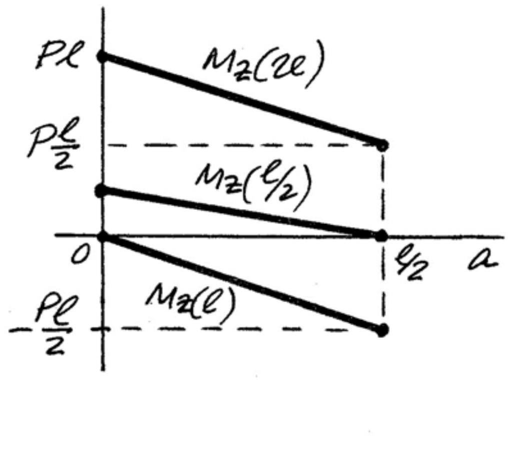
$$M_z(2\ell)=\frac{P}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}-a\right)2\ell-P\frac{3\ell}{2}+$$
$$+\frac{P}{\ell}\left(\frac{3\ell}{2}+a\right)\ell=P(\ell-a)$$

$2\ell<x<4\ell$

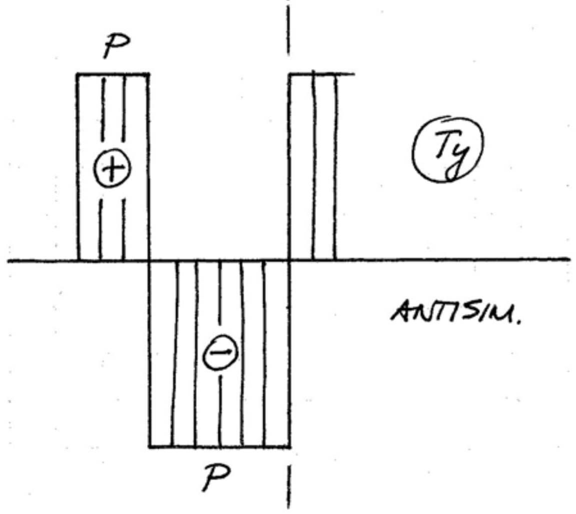
Por simetría T_y tendrá valores antisimétricos y M_z simétricos

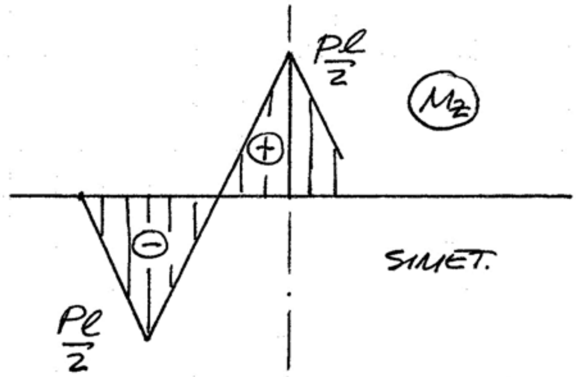
$$\left(\begin{array}{l} T_y=-T_y(4\ell-x) \\ M_z=M_z(4\ell-x) \end{array} \right.$$

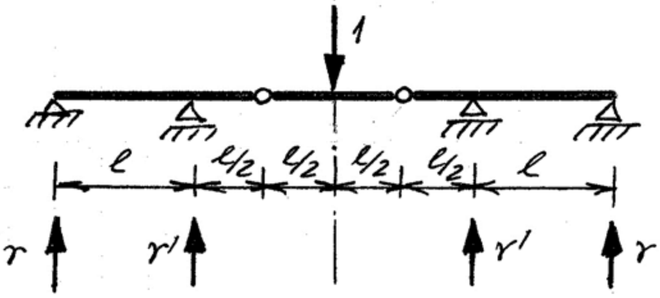
2) Representamos la variación de los momentos flectores extremos con la distancia "a"

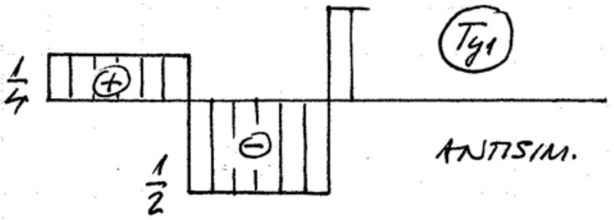


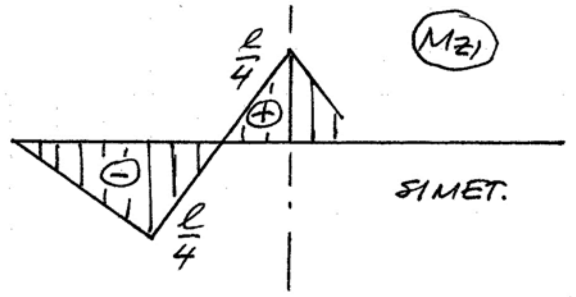
$a = \frac{l}{2}$











El mínimo de $|M_z|$ se consigue para $a = l/2$

$$M_z(2l) = |M_z(l)| = \frac{Pl}{2}$$

3) Las leyes de esfuerzos para el caso $a = \frac{l}{2}$ resultan:

$0 < x < 2l$

$$\begin{cases} T_y = P\langle x - \frac{l}{2}\rangle^0 - 2P\langle x - l\rangle^0 \\ M_z = -P\langle x - \frac{l}{2}\rangle + 2P\langle x - l\rangle \end{cases}$$

Para calcular el desplazamiento en la sección central usaremos el Método de la Carga Unitaria.

Cuando sobre la viga actúa sólo una carga unitaria en su sección central, tendremos por simetría:

$$r + r' = \frac{1}{2}$$

$$M_{z1}\left(\frac{3l}{2}\right) = r\frac{3l}{2} + r'\frac{l}{2} = 0$$

de donde:

$$r = -\frac{1}{4} \quad ; \quad r' = \frac{3}{4}$$

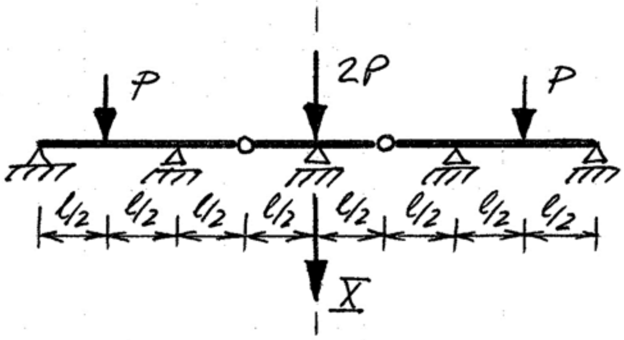
$0 < x < 2l$

$$\begin{cases} T_{y1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\langle x - l\rangle^0 \\ M_{z1} = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\langle x - l\rangle \end{cases}$$

$$\delta_P = \int_0^{4l} \frac{M_z M_{z1}}{EI_z}\,dx =$$

$$= \frac{2}{EI_z}\left[-\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Pl}{2}\left(-\frac{5}{6}\frac{l}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Pl}{2}\left(-\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Pl}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right)\right] = \frac{2Pl^3}{EI_z}\left(\frac{5}{24\cdot 8} + \frac{2}{48}\right) =$$

$$= \frac{13}{96}\frac{Pl^3}{EI_z}$$

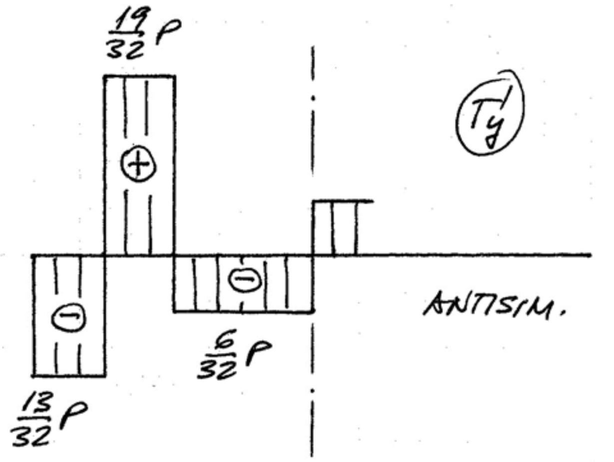


4) El desplazamiento producido por la carga unitaria en la sección central será:

$$\delta_1=\int_0^{4l}\frac{M_{z1}^2}{EI_z}dx=$$

$$=\frac{2}{EI_z}\left[-\frac{1}{2}l\frac{l}{4}\left(-\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right)+2\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{l}{4}\left(\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right)\right]=$$

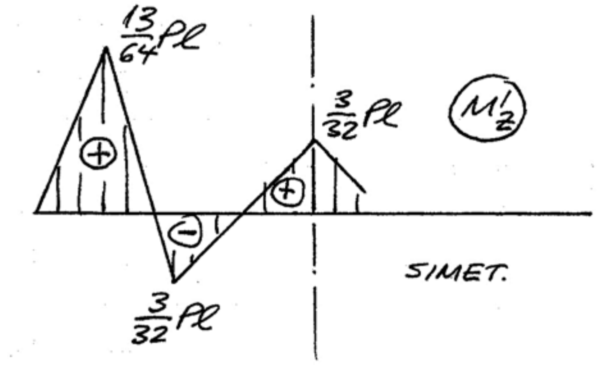
$$=\frac{1}{12}\frac{l^3}{EI_z}$$



Si llamamos X a la reacción en el apoyo central, con el mismo sentido que la carga unidad, se tendrá que verificar por superposición:

$$\delta_P+X\delta_1=0$$

$$\frac{13}{96}\frac{Pl^3}{EI_z}+\frac{1}{12}\frac{l^3}{EI_z}X=0 \qquad X=-\frac{13}{8}P$$



Las leyes y diagramas de esfuerzos se obtienen por superposición:

$0<x<2l$

$$\begin{cases} T'_y=T_y+X\,T_{y1}=T_y-\frac{13}{8}P\cdot T_{y1}\\ M'_z=M_z+X\,M_{z1}=M_z-\frac{13}{8}P\cdot M_{z1}\end{cases}$$

5)

– Sin apoyo. $|M_z|_{max}=\frac{Pl}{2}=\frac{25\cdot 2}{2}=25\ m\cdot kN$

$$W_z\geq\frac{|M_z|_{max}}{\sigma_{adm}}=\frac{25\cdot 10^6}{150}=166{,}7\cdot 10^3\ mm^3=166{,}7\ cm^3$$

IPE-200 ($W_z=194\ cm^3$; $I_z=1940\ cm^4$)

$$\delta_P=\frac{13}{96}\frac{Pl^3}{EI_z}=\frac{13}{96}\cdot\frac{25\cdot 10^3\cdot 2000^3}{200\cdot 10^3\cdot 1940\cdot 10^4}=7\ mm$$

– Con apoyo. $|M_z|_{max}=\frac{13}{64}Pl=\frac{13\cdot 25\cdot 2}{64}=10{,}16\ mkN$

$$W_z\geq\frac{|M_z|_{max}}{\sigma_{adm}}=\frac{10{,}16\cdot 10^6}{150}=67{,}7\cdot 10^3\ mm^3=67{,}7\ cm^3$$

IPE-140 ($W_z=77{,}3\ cm^3$)