

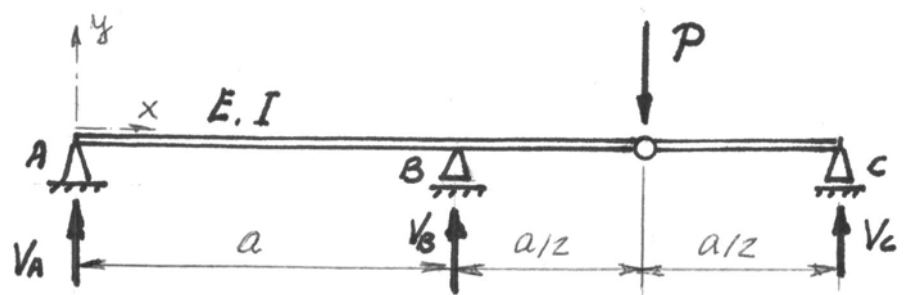
**EJERCICIO 2. PROBLEMA (10 puntos)**

Para la viga de la figura, se pide:

1º) Reacciones  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$ ,  
en función de  $P$

(1 punto)

2º) Diagramas acotados  
de esfuerzos utilizando  
las siguientes escalas:



*Longitud:  $a \equiv 50mm$  ; Esf. cortante:  $P \equiv 40mm$  ; Momento flector:  $Pa \equiv 80mm$  (1 punto)*

3º) Expresión integral (sin resolver) del potencial interno en función de  $P$ ,  $a$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $x$

(1 punto)

4º) Dimensionar con un perfil **IPN** para la siguiente aplicación:  $P=10kN$  ,  $a=2m$  ,  
 $E=200.000MPa$  ,  $\sigma_{adm}=200MPa$  (0,5 puntos)

5º) Hallar el desplazamiento vertical en  $mm$  de la rótula a partir de la expresión del potencial interno del apartado 3º y de la aplicación numérica del apartado 4º (1 punto)

6º) Dibujar a estima la elástica indicando claramente las curvaturas y los puntos de inflexión en caso de que existan. Utilice las siguientes escalas:

*Longitud:  $a \equiv 50mm$  ; 1mm de Desplazamiento Vertical  $\equiv 2mm$  (1 punto)*

7º) a.- Suponiendo que la rótula está bloqueada y que la viga mantiene la continuidad en

$x=3a/2$  , plantee la correspondiente ecuación universal y todas las condiciones de contorno necesarias para determinar las reacciones de los apoyos (2 puntos)

b.- Sabiendo que  $V_A = -3P/32$  ,  $V_B = 33P/48$  ,  $V_C = 13P/32$  trace los diagramas de esfuerzos superponiéndolos a los del apartado 2º y a la misma escala (1 punto)

c.- Hallar el desplazamiento vertical en  $mm$  de la rótula bloqueada a partir de la expresión de la ecuación universal del apartado 7º.a y de la aplicación numérica del apartado 4º (1 punto)

d.- Dibujar a estima la elástica superpuesta a la del apartado 6º y utilizando las mismas escalas (0,5 puntos)

EJERCICIO 2. PROBLEMA

1º) Equilibrio vertical:  $V_A + V_B + V_C = P$

Equilibrio de momentos a derecha e izquierda de la rótula:

$$V_C \cdot a/2 = 0$$

$$V_A \cdot 3a/2 + V_B \cdot a/2 = 0$$

De las 3 ecuaciones se despeja:

$$V_A = -\frac{P}{2}; \quad V_B = \frac{3P}{2}; \quad V_C = 0$$

2º) Diagramas de esfuerzos

3º) leyes de momentos flectores:

$$0 \leq x \leq a: \quad M(x) = -Px/2$$

$$a \leq x \leq 3a/2: \quad M(x) = \frac{P}{2}(2x-3a)$$

$$\text{Potencial interno: } \mathcal{E} = \int \frac{M^2(x)}{2EI} dx =$$

$$= \frac{P^2}{8EI} \left[ \int_0^a x^2 dx + \int_a^{3a/2} (2x-3a)^2 dx \right]$$

4º)  $P=10\text{kN}$ ,  $a=2\text{m}$ ,  $\sigma_{adm} = 200\text{MPa}$

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{W} \leq \sigma_{adm}$$

$$W \geq \frac{Pa}{2\sigma_{adm}} = \frac{10\text{kN} \cdot 2\text{m}}{2 \cdot 200\text{MPa}} = 50\text{cm}^3$$

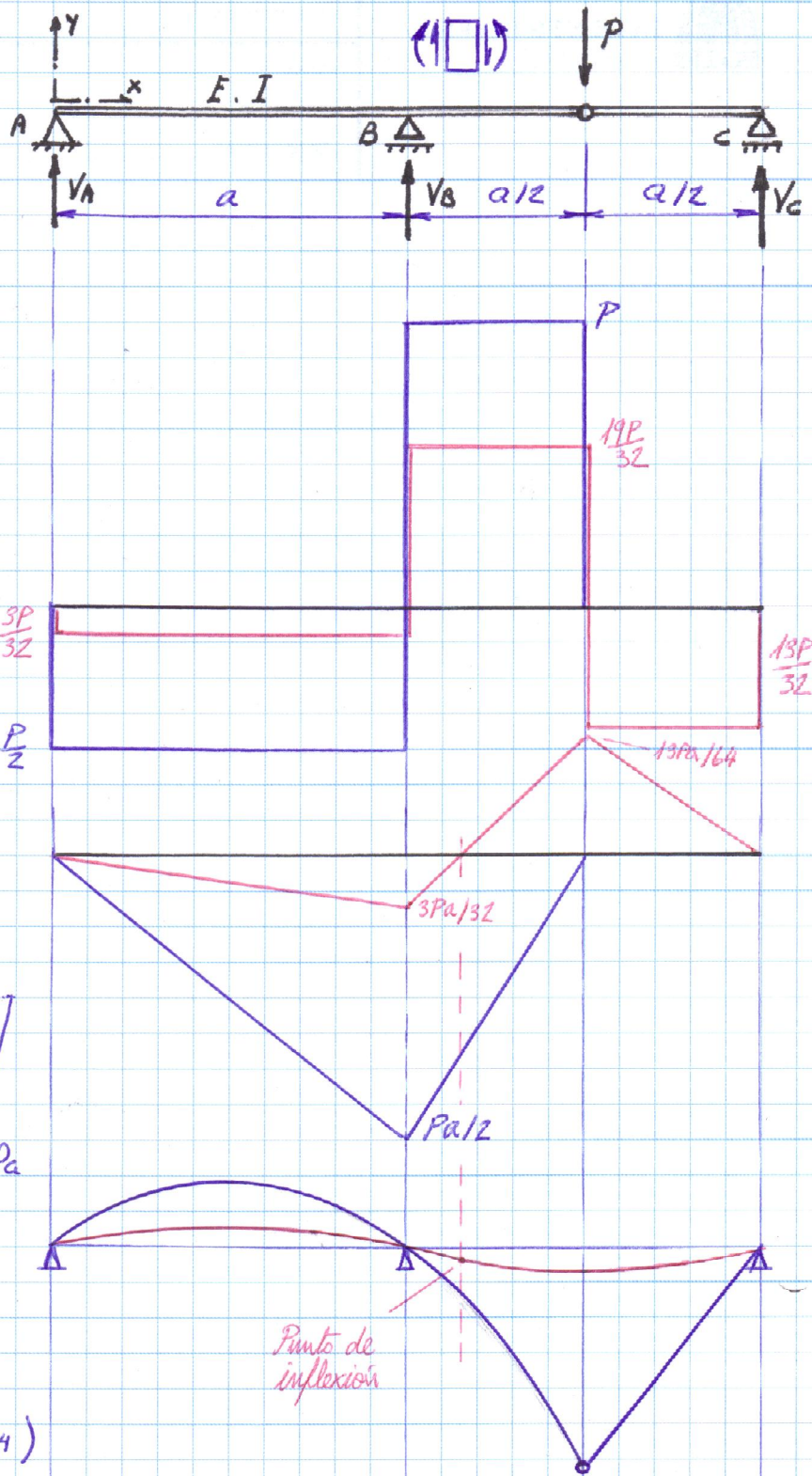
Tablas: IPN-120 ( $W=54.7\text{cm}^3$ ;  $I=328\text{cm}^4$ )

5º) Desplazamiento vertical de la rótula (Teorema de Castigliano):

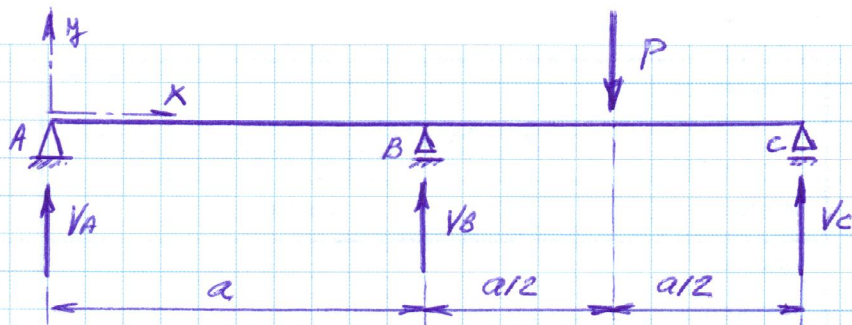
$$\delta = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} = \frac{2P}{8EI} \left[ \int_0^a x^2 dx + \int_a^{3a/2} (2x-3a)^2 dx \right] = \frac{Pa^3}{8EI} =$$

$$= \frac{10\text{kN} \cdot 2^3\text{m}^3}{8 \cdot 200.000\text{N/mm}^2 \cdot 328\text{cm}^4} = 15,14\text{mm}$$

6º) Elástica



7.a)



Equilibrio:  $V_A + V_B + V_C = P$

$(M_A = 0): V_B a + V_C 2a - P 3a/2 = 0$

Ecuación universal:  $EI y = EI \theta_0 x + \frac{V_A}{6} x^3 + \frac{V_B}{6} (x-a)^3 - \frac{P}{6} (x - \frac{3a}{2})^3$

Condiciones de contorno:  $y(0) = y_0 = 0$

$y(a) = 0 \rightarrow EI \theta_0 a + \frac{V_A}{6} a^3 = 0$

$y(2a) = 0 \rightarrow EI \theta_0 2a + \frac{V_A}{6} (2a)^3 + \frac{V_B}{6} (2a-a)^3 - \frac{P}{6} (2a - \frac{3a}{2})^3$

7.b) De las ecuaciones anteriores se obtiene:  $V_A = -\frac{3P}{32}$  ;  $V_B = \frac{33P}{48}$  ;  $V_C = \frac{13P}{32}$

Diagramas de esfuerzos (superpuestos a los anteriores) (en rojo)

7.c) Desplazamiento de la rótula:  $\delta = y(x = 3a/2)$

$EI y(3a/2) = EI \theta_0 \frac{3a}{2} + \frac{V_A}{6} (\frac{3a}{2})^3 + \frac{V_B}{6} (\frac{3a}{2} - a)^3$

Teniendo en cuenta que:  $\theta_0 = \frac{-V_A}{6EI} a^2$ , sustituyendo  $V_A, V_B$  y operando, se obtiene:

$y(\frac{3a}{2}) = \frac{-23}{1536} \frac{Pa^3}{EI}$

Aplicación numérica:  $y(\frac{3a}{2}) = \frac{-23}{1536} \frac{10 \text{ kN} \cdot 2^3 \text{ m}^3}{200.000 \text{ MPa} \cdot 328 \text{ cm}^4} = 1.83 \text{ mm}$

7.d) Elástica superpuesta a la anterior (en rojo)