

GRUPO

NOMBRE

Nº

1. El estado tensional en los puntos de un sólido elástico viene dado por una matriz de tensiones $[T](x,y,z)$ en MPa con las coordenadas x,y,z en m. Las unidades de las fuerzas de volumen actuantes son:

MPa

MN/m³

MN/m²

MN

2. Indique la afirmación CORRECTA en relación con el estado tensional de un sólido en un punto:

El estado tensional queda completamente determinado por las componentes normal y tangencial del vector tensión.

Conocida la matriz de tensiones es posible calcular las tensiones respecto a cualquier plano que pase por el punto.

Las tensiones principales son los valores de las tensiones normales respecto a tres planos ortogonales cualesquiera

Si dos tensiones principales son iguales, la tercera tensión principal es siempre nula.

3.- De las siguientes afirmaciones, marque la que considere FALSA:

Si las tensiones son funciones cuadráticas de las coordenadas, las fuerzas de volumen son lineales

La matriz de tensiones en un punto es simétrica porque en el entorno del mismo debe haber equilibrio de momentos

En cualquier punto de un sólido en equilibrio, siempre existen tres direcciones ortogonales para las que el vector tensión correspondiente tiene componente normal nula

Para que el sólido esté en equilibrio, las fuerzas de superficie y de volumen deben estar en equilibrio

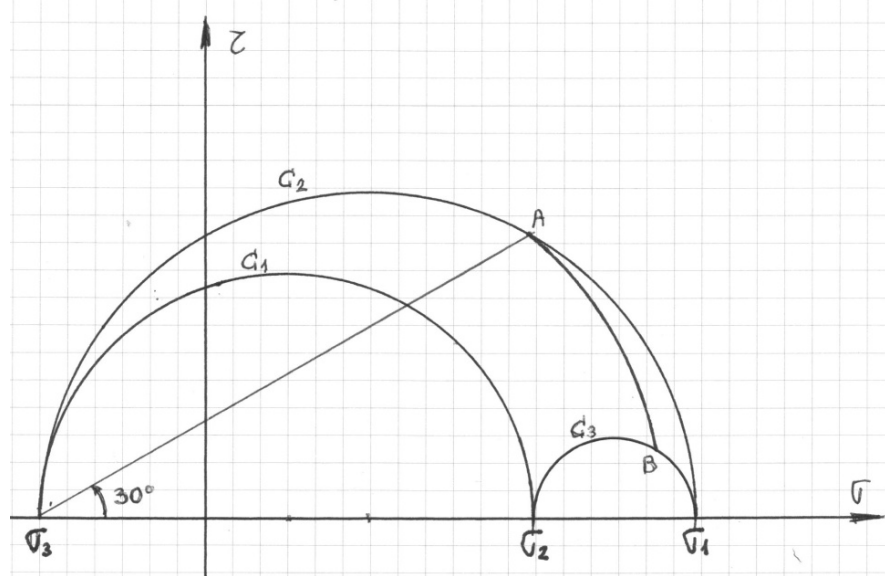
4.- En el diagrama de Mohr de la figura, el arco AB es concéntrico con C_1 . El arco AB es el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión...

... que forman 30° con la normal

... cuya componente normal forma 30° con la 1ª dirección principal

... cuya componente normal forma 30° con la 3ª dirección principal

... cuyo módulo es igual al radio del arco



5. En la representación gráfica de los círculos de Mohr, si un punto se localiza en la circunferencia $\gamma = 0$ (C_3), significa que corresponde a...

... un plano cuya normal es paralela a la tercera dirección principal.

... un plano perpendicular a la tercera dirección principal.

... una dirección perpendicular a la tercera dirección principal.

... una dirección perpendicular al eje Z, aunque éste no sea dirección principal.

6.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

El módulo de Young (E), puede ser negativo

El módulo de elasticidad transversal (G), puede ser negativo

Un sólido elástico lineal isótropo tiene 3 constantes elásticas independientes

Si el coeficiente de Poisson fuese negativo, al traccionar el sólido sus dimensiones transversales aumentarían

7. Si un cilindro con eje de revolución Z está sometido únicamente a una fuerza de compresión según Z:

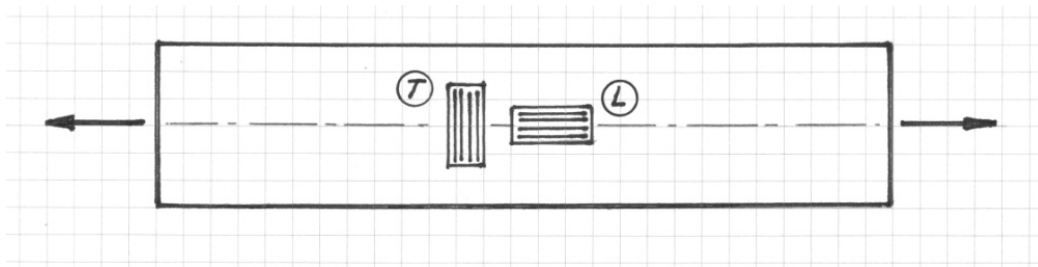
Sufrirá un acortamiento que depende sólo de la fuerza aplicada y del módulo elástico E.

Experimentará un ensanchamiento de sus dimensiones perpendiculares al eje Z independiente del coeficiente de Poisson.

Sólo tendrá tensiones en dirección Z pero aparecen deformaciones en todas las direcciones coordenadas.

Si se duplican la sección del cilindro y la fuerza, el acortamiento también se duplica.

8.- La probeta de la figura está sometida a tracción y tiene adheridas dos galgas, una paralela a la dirección de tracción (L), y otra perpendicular (T). Si el material ensayado es aluminio, y el ensayo se realiza en régimen elástico, marque la opción FALSA:



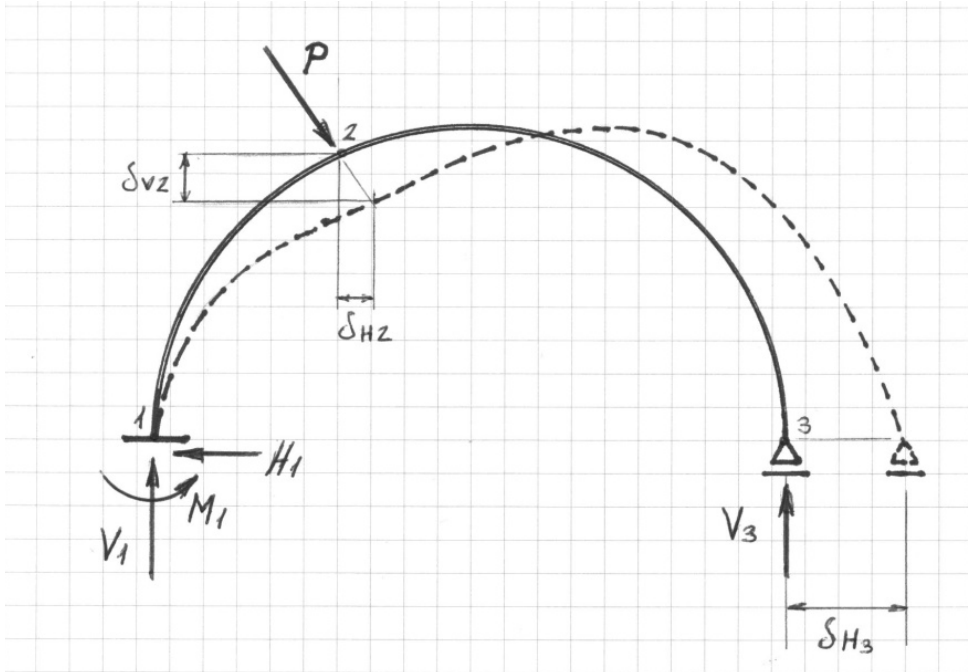
Los registros de ambas galgas varían linealmente con la carga de tracción

El registro de la galga L es no nulo y positivo

El registro de la galga T es no nulo y negativo

El registro de la galga T es nulo

9.- En la figura se presenta a trazos la posición final de un arco sometido a la fuerza exterior P , aplicada en 2. Se indican las reacciones en los apoyos, así como las componentes verticales y horizontales de los desplazamientos de los puntos 2 y 3. La expresión correcta de la energía elástica acumulada en el arco es:



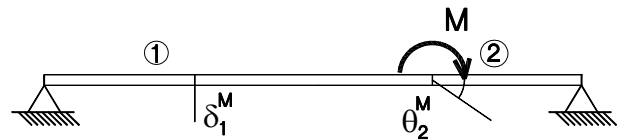
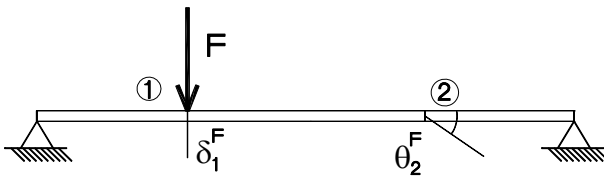
$\frac{1}{2} P \delta_{v2}$

$\frac{1}{2} P \delta_{H2}$

$\frac{1}{2} P \sqrt{\delta_{H2}^2 + \delta_{v2}^2}$

$\frac{1}{2} P \delta_{v2} + V_3 \delta_{H3}$

10.- Sobre la viga de la figura pueden actuar una fuerza F en el punto 1 y un momento M en el punto 2 y para cada sollicitación se miden los desplazamientos y giros representados. Indique la expresión correcta del teorema de Maxwell-Betti:



$\delta_1^M \cdot F = \theta_2^F \cdot M$

$\delta_1^F \cdot F = \theta_2^M \cdot M$

$\delta_1^M \cdot M = \theta_2^F \cdot F$

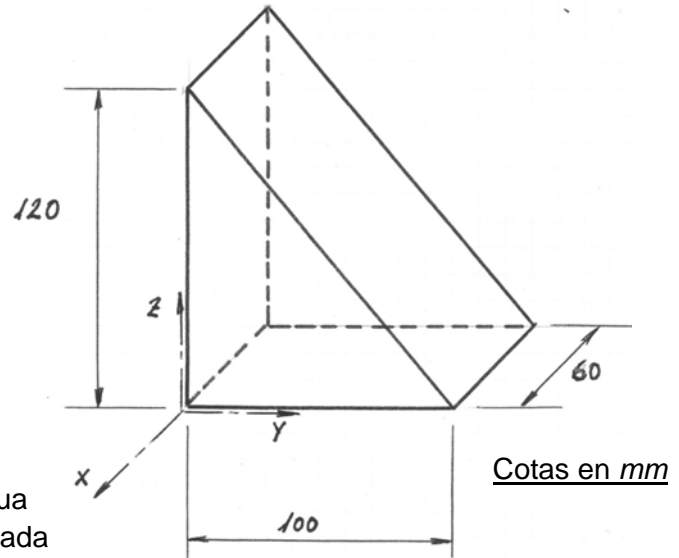
$\delta_1^F \cdot M = \theta_2^M \cdot F$

1.- El sólido elástico de la figura está sometido a un estado tensional definido por la matriz de tensiones (tensiones expresadas en MPa y coordenadas en mm):

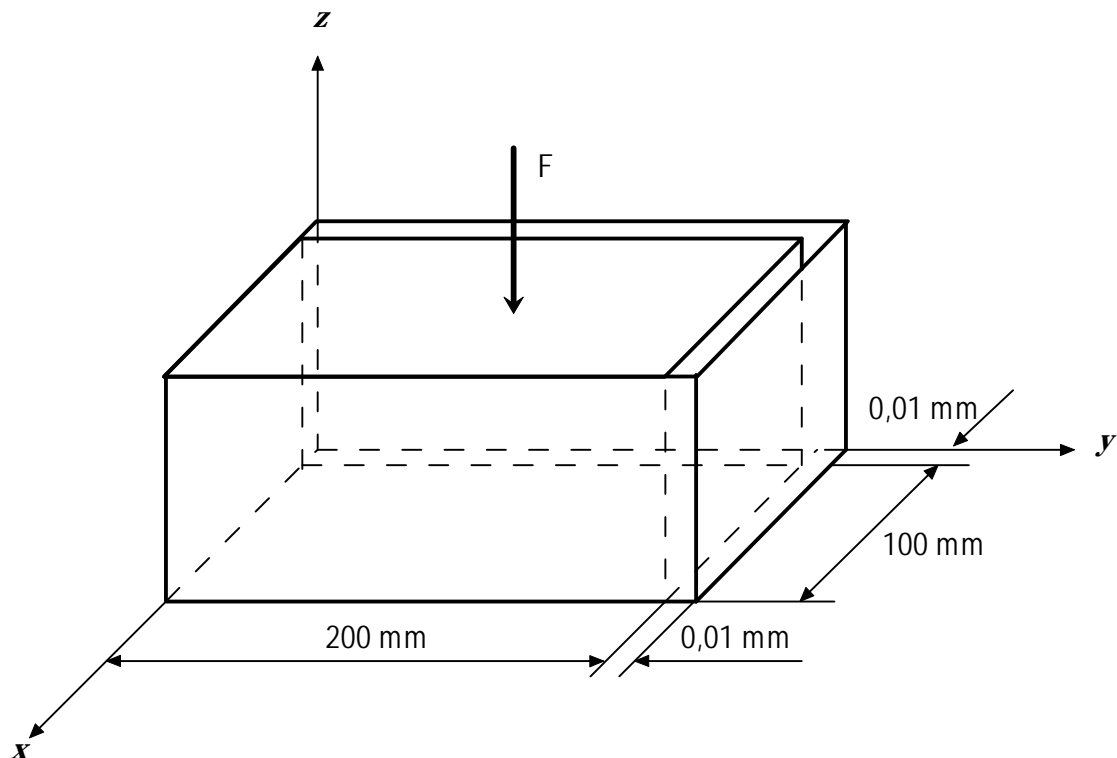
$$T = \begin{bmatrix} 50x & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- 1º) Vector de fuerzas de volumen (exprese las unidades)
- 2º) Vector de fuerzas de superficie en la cara oblicua
- 3º) Energía elástica acumulada en el sólido expresada en Julios. Datos: $E = 70.000\text{MPa}$; $\nu = 1/3$



2.- La zapata de hormigón de sección prismática de la figura ($E = 27\text{ GPa}$, $\nu = 0,2$), debido a la retracción tras el fraguado se encuentra encastrada en un hueco de dimensiones ligeramente superiores.



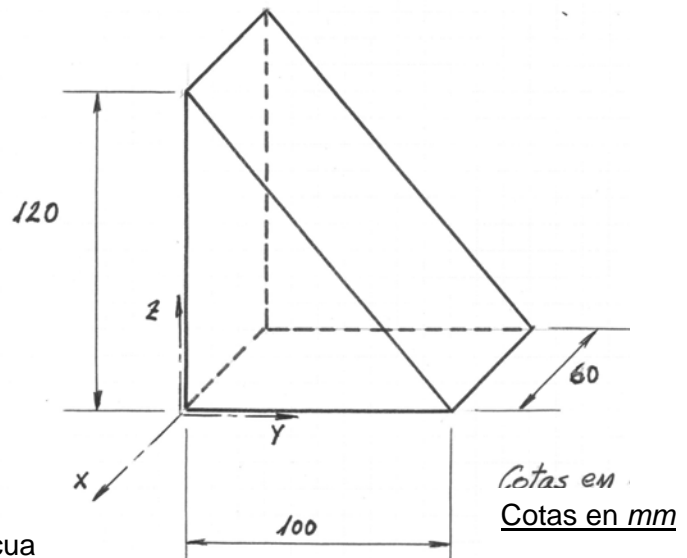
Bajo condiciones ideales (ausencia de rozamientos, distribución uniforme de las tensiones en las caras, estado tensional homogéneo), calcule el valor mínimo de la carga F de compresión que haría que la zapata ocupase completamente el hueco.

1.- El sólido elástico de la figura está sometido a un estado tensional definido por la matriz de tensiones (tensiones expresadas en MPa y coordenadas en mm):

$$T = \begin{bmatrix} 50x & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- 1º) Vector de fuerzas de volumen (exprese las unidades)
- 2º) Vector de fuerzas de superficie en la cara oblicua
- 3º) Energía elástica acumulada en el sólido expresada en Julios. Datos: $E = 70.000 \text{ MPa}$; $\nu = 1/3$



1º) Ecuaciones de equilibrio interno:

$$f_{vx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = f_{vx} + 50 = 0 \rightarrow f_{vx} = -50 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} = -50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3}$$

$$f_{vy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = f_{vy} = 0$$

$$f_{vz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = f_{vz} = 0$$

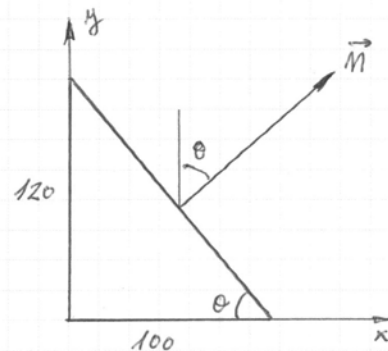
Vector de fuerzas de volumen: $\vec{f}_v (-50, 0, 0) \text{ N/mm}^3$

2º) Fuerzas de superficie en la cara oblicua:

$$\theta = \arctan \frac{120}{100} = 50,2^\circ$$

$$\vec{n} (0, \sin \theta, \cos \theta) = \vec{n} (0, 0,77, 0,64)$$

$$\vec{f}_s = \begin{bmatrix} 50x & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,77 \\ 0,64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -23,1 \\ -64 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



3º) Energía elástica:

$$W = \iiint \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] dV =$$

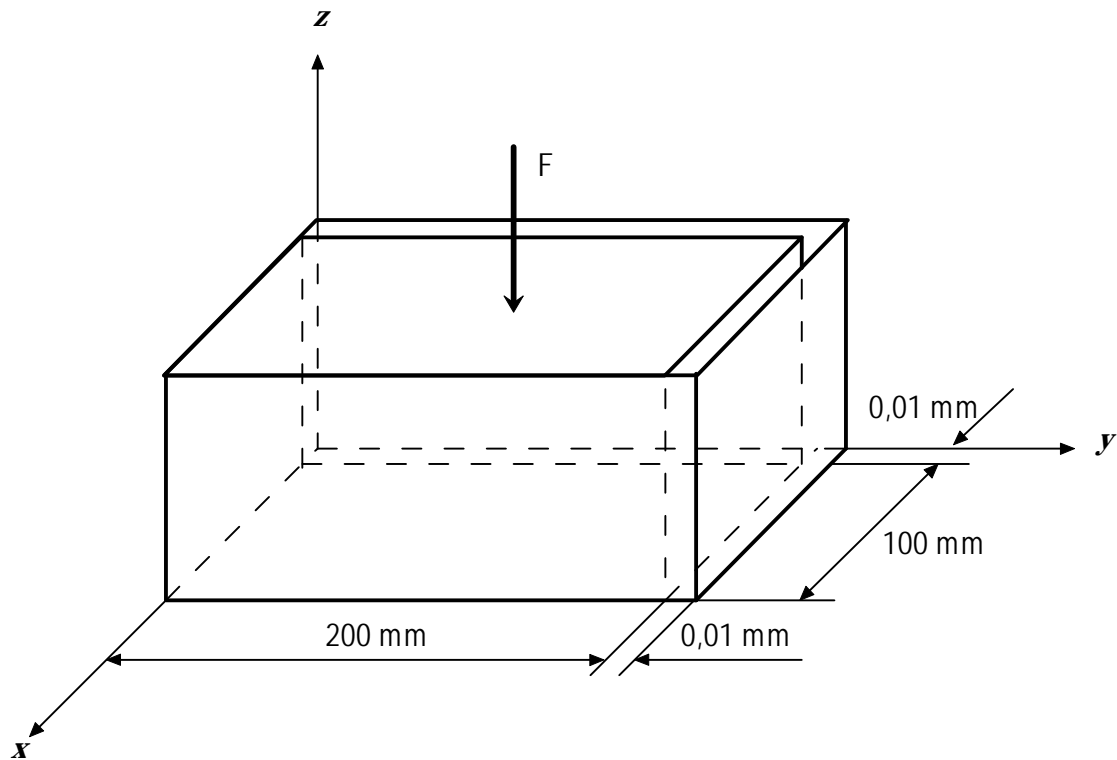
$$= \iiint \left[\frac{1}{2 \cdot 70000} (50^2 x^2 + 30^2 + 100^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} (50x(-30) + 50x(-100) + (-30)(-100))) \right] dV =$$

$$= \frac{1}{140.000} \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 120 \int_{-60}^0 (2500x^2 + \frac{13000}{3}x - 8900) dx =$$

$$= 7357114,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ mm}^3 = 7.357,1 \text{ Julios}$$

PROBLEMA 2

La zapata de hormigón de sección prismática de la figura ($E = 27 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$), debido a la retracción tras el fraguado se encuentra encastrada en un hueco de dimensiones ligeramente superiores.



Bajo condiciones ideales (ausencia de rozamientos, distribución uniforme de las tensiones en las caras, estado tensional homogéneo), calcule el valor mínimo de la carga F de compresión que haría que la zapata ocupase completamente el hueco.

RESOLUCIÓN

La fuerza pedida se obtiene como $F = |\sigma_z| \cdot A$, siendo A el área de la cara superior en la configuración indeformada (el incremento de sección debido a la deformación es un efecto despreciable). σ_z es, por tanto, la incógnita del problema.

Las deformaciones que se alcanzan cuando la zapata toca con ambas paredes del alojamiento, son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x \text{ máx}} &= \frac{0,1 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 10^{-4} \\ \varepsilon_{y \text{ máx}} &= \frac{0,1 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0,5 \cdot 10^{-4}\end{aligned}\quad (1 \text{ punto})$$

Antes de tocar con las paredes, el estado de tensiones en la zapata es de compresión uniaxial por lo que, según las leyes de Hooke, las deformaciones transversales son iguales: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$. Como $\varepsilon_{y \text{ máx}} < \varepsilon_{x \text{ máx}}$, entonces el hormigón tocará primero con la pared derecha que con la pared trasera durante su expansión transversal. Esto implica que antes de llenar completamente el hueco aparecen tensiones de compresión σ_y no nulas.

Justo al llenar completamente el hueco no hay todavía tensiones por contacto con la pared trasera (pero sí con las paredes izquierda y derecha), y las condiciones para resolver el problema son las siguientes:

$$\varepsilon_x = 10^{-4} \quad \varepsilon_y = 0,5 \cdot 10^{-4} \quad \sigma_x = 0 \quad (2 \text{ puntos})$$

Con estos tres datos y las tres leyes de Hooke es posible hallar el resto de las incógnitas.

De la primera ley de Hooke:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \frac{E}{\nu} \varepsilon_x - \sigma_z$$

Sustituyendo en la segunda ley:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \rightarrow \quad \sigma_z = -\frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\varepsilon_x}{\nu} + \varepsilon_y \right)$$

Sustituyendo valores:

$$\sigma_z = \frac{2,7 \cdot 10^4 \text{ MPa}}{1+0,2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} - \frac{2,7 \cdot 10^4 \text{ MPa}}{0,2} 10^{-4} = -12,4 \text{ MPa}$$

De donde $F = 12,4 \text{ MPa} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 = 248 \text{ kN}$ (7 puntos)